TD 8 - Corrigé des exercices 3 à 5

Exercice 3

1. a) Si $t \neq \pm 1$, on a $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = \dfrac{-t}{1-t^2}x(t) + \dfrac{1}{1-t^2}y(t) + \dfrac{1}{1-t^2} \\ y'(t) = \dfrac{1}{1-t^2}x(t) - \dfrac{t}{1-t^2}y(t) + \dfrac{1}{1-t^2} \end{cases}$, donc

$$a(t) = \frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ sont continues sur tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, d'où l'existence de solutions pour (S) sur I ; on a unicité de la solution sur I si on ajoute une condition initiale (par exemple les valeurs de x et y en 0, si $0 \in I$).

2. a) On a $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t}$ et $\dfrac{-t}{1-t^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t}$, on en déduit :

$$M = \int_0^t \frac{ds}{1-s^2} = \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} , \quad L = \int_0^t \frac{-sds}{1-s^2} = \ln\sqrt{1-t^2} \quad \text{et} \quad A(t) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix} .$$

b) On a $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc $P^{-1} = \frac{1}{2}P$; on en déduit

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} L+M & 0 \\ 0 & L-M \end{pmatrix} ,$$

donc $\lambda_1(t) = \ln\sqrt{1-t^2} + \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ et $\lambda_2(t) = \ln\sqrt{1-t^2} - \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$. Il s'ensuit que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \left[P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P\right]^n = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P ,$$

puis

$$e^{A(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n = P^{-1}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\right] P = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} P ,$$

si bien que :

$$e^{A(t)} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ouf!)}$$

c) $a(t)e^{A(t)} = \frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(e^{A(t)}\right)'$.

d) On a $a(t)\big(X_1(t)\ \ X_2(t)\big) = \big(X_1'(t)\ \ X_2'(t)\big)$ d'après ce qui précède ; or on vérifie que :

$$a(t)\big(X_1(t)\ \ X_2(t)\big) = \big(a(t)X_1(t)\ \ a(t)X_2(t)\big)$$

— c'est un calcul de multiplication *par blocs* — donc $a(t)X_i(t) = X_i'(t)$ pour $i = 1, 2$, c'est-à-dire X_1 et X_2 sont solutions de (S_0). De plus, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda X_1 + \mu X_2 = 0$ (la *fonction* nulle), alors pour tout $t \in]-1, 1[$ on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu t = 0 \\ \lambda t + \mu = 0 \end{cases} ,$$

d'où $\lambda = \mu = 0$; il s'ensuit que la famille (X_1, X_2) est libre. Enfin on sait que l'ensemble des solutions de (S_0) est un espace vectoriel de dimension 2, donc (X_1, X_2) en est une base.

[En fait, pour tout $t_0 \in I$, l'application $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de l'ensemble des solutions de (S_0) dans $\mathbb{R}^2$; il suffit donc de vérifier, par exemple, que $(X_1(0), X_2(0))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ pour montrer que (X_1, X_2) est une base de l'ensemble des solutions de (S_0).]

3. a) $WK = \big(X_1\ \ X_2\big)\binom{k_1}{k_2} = \big(k_1X_1 + k_2X_2\big) = (X)$, $aW = a\big(X_1\ \ X_2\big) = \big(X_1'\ \ X_2'\big) = W'$.

b) On a $X' = W'K + WK' = aWK + WK' = aX + WK'$, d'où X est solution de (S) si et seulement si $WK' = b$, c'est-à-dire $K' = W^{-1}b$.

c) On a

$$W^{-1}b = \frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-t^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-t)(1+t)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

d'où X est solution de (S) si et seulement si

$$k_1'(t) = k_2'(t) = \frac{1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{1/4}{1-t} + \frac{1/4}{1+t} + \frac{1/2}{(1+t)^2} ,$$

c'est-à-dire si et seulement s'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$k_1(t) = c_1 + \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1/2}{1+t} , \quad k_2(t) = c_2 + \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1/2}{1+t} .$$

Les solutions de (S) définies sur $]-1, 1[$ sont donc les fonctions X de la forme :

$$X(t) = \left(c_1 + \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1/2}{1+t}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \left(c_2 + \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1/2}{1+t}\right)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, autrement dit :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1+t}{4}\ln\dfrac{1+t}{1-t} , \\[2ex] y(t) = c_1 t + c_2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1+t}{4}\ln\dfrac{1+t}{1-t} . \end{cases}$$

Exercice 4

1. Soit y une solution de (E). De $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on tire $xy' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ et $y'' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$; en écrivant que y est solution de (E), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0$, ce qui donne bien la relation de récurrence $a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

2. Des récurrences immédiates donnent $a_{2p} = \frac{1}{p!} a_0$ et $a_{2p+1} = \frac{2^p}{1 \cdot 3 \cdots (2p+1)} a_1$ pour tout $p \geq 0$, d'où le résultat.

3. On a $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, donc la famille $\left(\binom{y_1(0)}{y_1'(0)}, \binom{y_1(0)}{y_1'(0)} \right)$ est libre dans $\mathbb{R}^2$, ce qui entraîne que (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E).

4. On voit que $y_1(x) = e^{x^2}$; comme $\frac{a_{2p+3}}{a_{2p+1}} = \frac{2}{2p+3} \to 0$ quand $p \to +\infty$, le rayon de convergence de la série qui définit y_2 est infini.

5. De $y_2 = ze^{x^2}$, on tire $y_2' = (z' + 2xz)e^{x^2}$, $y_2'' = (z'' + 4xz' + (4x^2+2)z)e^{x^2}$, puis, en écrivant que y_2 est solution de (E), on obtient $z'' + 2xz' = 0$. Il s'ensuit que $z'(x) = e^{-x^2}$ et, comme $y_2(0) = 0$,
$$y_2(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \ .$$
D'après la question 3, on en déduit que la forme générale des solutions de (E) est
$$y(x) = e^{x^2} \left(\lambda + \mu \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

6. a) Soit y une solution de (E) qui a une limite finie en $+\infty$, donnée sous la forme ci-dessus. Comme $\lim\limits_{+\infty} e^{x^2} = +\infty$, on a nécessairement
$$0 = \lim_{x \to +\infty} \left(\lambda + \mu \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = \lambda + \mu \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lambda + \mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ,$$
d'où $y(x) = e^{x^2} \left(-\mu \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt + \mu \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = -\mu e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

   b) On vérifie immédiatement que $e^{-t^2} = \frac{1}{2t} \left(-e^{-t^2} \right)'$ pour tout $t > 0$; comme $t \geq x \Rightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$, on en tire la majoration
$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{2x} \int_x^{+\infty} \left(-e^{-t^2} \right)' dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2} \ .$$

   c) Il s'ensuit que $|y(x)| \leq |\mu| \frac{1}{2x}$ pour tout $x > 0$, donc $\lim\limits_{+\infty} y(x) = 0$. Les solutions de (E) qui ont une limite finie en $+\infty$ sont donc les fonctions de la forme $y(x) = \mu e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ avec $\mu \in \mathbb{R}$; de plus, elles tendent toutes vers 0 en $+\infty$.

Exercice 5

1. On vérifie immédiatement que $u(x) = e^x$ est une solution de (E).
2. De $y = ze^x$, on déduit $y' = (z + z')e^x$ et $y'' = (z + 2z' + z'')e^x$; en injectant dans (E), on en tire
$$(1 + x)z'' + 2xz' = 0 \ ,$$
puis, en intégrant $-\frac{2x}{1+x} = -2 + \frac{2}{1+x}$, on trouve $z'(x) = (1 + x)^2 e^{-2x}$.
3. Si $z(x) = P(x)e^{-2x}$, alors $z'(x) = (P'(x) - 2P(x))e^{-2x}$, donc $P'(x) - 2P(x) = (1 + x)^2$; ceci entraîne que P est de degré 2 et, en dérivant deux fois l'égalité précédente, on obtient $P''(x) = -1$ pour tout x ; en la dérivant une fois, on trouve $P'(x) = -x - \frac{3}{2}$, puis
$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \ .$$
4. L'équation différentielle (E) étant linéaire du second ordre homogène, l'ensemble de ses solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Il s'ensuit que (u, zu) en est une base, donc la forme générale des solutions de (E) est
$$\lambda e^x + \mu e^{-x}(2x^2 + 6x + 5) \ , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$