IREM de Limoges
Groupe de Brive
Conjectures et preuves

Activité n°5 : les nombres heureux

On part d'un nombre entier non nul, on fait la somme des carrés de ses chiffres, on obtient un nouveau nombre et on recommence :

$$44 \quad \rightarrow \quad 4^2+4^2=32 \quad \rightarrow \quad 3^2+2^2=13 \quad \rightarrow \quad \cdots$$

1. Continuer l'exemple. Faire de même avec 19 et 94.
2. Tester avec des nombres de votre choix. Que constatez-vous ?
3. Les *nombres heureux* sont ceux pour lesquels on finit par arriver à 1. Que se passe-t-il pour les autres nombres (qu'on appelle les nombres *malheureux*) ?

Quelques propriétés.

4. Tester avec 23, 32 et 230, quelles propriétés cet exemple met-il en évidence ?
5. Trouver un nombre malheureux à 10 chiffres.
6. Quels sont les nombres heureux qui arrivent à 1 en une étape ?

Classe tes réponses aux questions dans le tableau page suivante.

C'est vrai, j'en suis sûr(e) ! Je pourrai le prouver si on me le demande	
Cela me semble vrai Je ne sais pas le prouver mais j'y crois	
Je ne me prononce pas Je me pose la question de savoir si c'est vrai ou pas	

Pour l'enseignant

1 Objectifs

L'activité a un double objectif :

(i) faire découvrir aux élèves des énoncés mathématiques de différents statuts : propriétés, conjectures ou simples questions ; c'est l'objet des questions 1. à 6. ;

(ii) les faire réfléchir au statut des énoncés qui ont été découverts : c'est à cet effet qu'on leur demande, à la fin, de classer leurs réponses (c'est-à-dire les énoncés qui ont été mis au jour) dans le tableau de la page 2.

Les rubriques du tableau tentent de donner une idée intuitive de ce qu'on entend par *propriété* (case « C'est vrai, j'en suis sûr »), *conjecture* (case « Cela me semble vrai ») ou simple *question* (case « Je ne me prononce pas »), laquelle est précisée par une phrase plus explicite. Le vocabulaire lui-même n'est pas au programme du cycle 4 (ce qui bien sûr n'empêche pas de l'utiliser si on le souhaite), ce qui paraît important pour la suite des apprentissages mathématiques est de faire émerger chez les élèves la conscience que tous les énoncés (mathématiques, ou autre !) n'ont pas le même statut et de les entraîner, dans des cas simples, à déterminer le statut de tel ou tel énoncé.

2 Réponses attendues

Comme dans l'exemple donné au début de l'activité, on note avec une simple flèche (. $\to$.) le passage d'un nombre à la somme des carrés de ses chiffres.

1. En continuant l'exemple, on obtient :

$$44 \quad \to \quad 32 \quad \to \quad 13 \quad \to \quad 1^2 + 3^2 = 10 \quad \to \quad 1^2 + 0^2 = 1$$

et on constate que 1 est fixe : $1 \to 1^2 = 1$. De même :

$$19 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1 \quad \text{et} \quad 94 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$$

On classe ces réponses dans la case « j'en suis sûr » du tableau : ce sont des résultats de calcul, il suffit donc de s'assurer qu'ils sont corrects.

Aide pour les élèves : on pourra afficher la liste des carrés des entiers inférieurs ou égaux à 9 *au tableau et/ou autoriser la calculatrice.*

2. On constate que certains nombres « terminent » sur 1 tandis que d'autres tombent sur une boucle de longueur 8, par exemple en partant de 2 on obtient :

$$4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to \cdots \qquad (1)$$

(et on reste indéfiniment dans cette boucle lorsqu'on y est entré.)

Là encore, il s'agit de résultats de calculs, on peut donc placer cet énoncé : « certains terminent sur 1, d'autres sur la boucle (1) », dans la case « j'en suis sûr » du tableau.

Aide pour les élèves : si ça bloque, proposer de partir de 2 *pour trouver la boucle.*

3. On constate que les nombres *malheureux* (ceux qui ne « terminent » pas sur 1) tombent "tous" dans la boucle (1) ci-dessus.

   On n'a pas de preuve à ce stade du fait que *tous* les nombres malheureux finissent dans la boucle (1), cet énoncé est donc une conjecture (case « cela me semble vrai ») si on considère qu'on a suffisamment d'exemples pour y croire, ou une question (case « Je ne me prononce pas ») si on a encore des doutes.

4. On a $23 \to 2^2 + 3^2 = 13$, $32 \to 3^2 + 2^2 = 13$ et $230 \to 2^2 + 3^2 + 0^2 = 13$ (puis $13 \to 10 \to 1$). On constate sur cet exemple que l'ordre des chiffres et la présence de 0 ne changent pas le résultat.

   On peut facilement transformer le raisonnement ci-dessus en une preuve générale, donc envisager de classer l'énoncé *l'ordre des chiffres et la présence de* 0 *ne changent pas le résultat* dans la case « j'en suis sûr ».

5. En se servant du constat précédent, on trouve facilement un nombre malheureux à 10 chiffres, par exemple 2 000 000 000. On peut aussi vérifier que 1 234 567 890 est malheureux, par exemple en utilisant la formule

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   qui pour $n = 9$ donne 285, puis $285 \to 93 \to 90 \to 81 \to 65 \to 61 \to 37$, qui figure dans la boucle (1).

   Le fait qu'un nombre à 10 chiffres donné soit malheureux peut être classé dans la case « j'en suis sûr », dès lors que le calcul montrant qu'on tombe dans la boucle a été soigneusement relu pour s'assurer qu'il est correct. Pour le premier nombre pris en exemple, 2 000 000 000, c'est immédiat !

6. Les nombres heureux qui arrivent à 1 en une étape sont les puissances de 10 : en effet, pour que la somme des carrés des chiffres soit 1, il ne doit y avoir qu'un seul chiffre différent de 0 et il doit être égal à 1.

   On peut étayer cette preuve en donnant la liste des carrés des entiers entre 0 et 9 pour faire apparaître que toute somme de carrés comportant plus d'un carré non nul ou au moins un carré > 1 ne peut être égale à 1 (ou encore en constatant qu'un carré est toujours ≥ 0, et toujours ≥ 1 pour un carré d'entier non nul).

   La preuve qui vient d'être donnée permet d'inscrire cet énoncé dans la case « j'en suis sûr », du moins pour ceux qui l'ont trouvée convaincante.

3 Prolongement niveau collège

On peut programmer le calcul des nombres heureux jusqu'à une borne avec Scratch, pour se rendre compte qu'ils sont largement minoritaires mais pas rares : jusqu'à 999, 142 entiers naturels sont heureux. Voici un programme Scratch qui permet de déterminer ce nombre.

```
définir Somme des carrés des chiffres (entier)
mettre [somme] à (0)
mettre [nombre] à (entier)
répéter jusqu'à ce que <(nombre) = (0)>
    mettre [somme] à ((somme) + (((nombre) modulo (10)) * ((nombre) modulo (10))))
    mettre [nombre] à (((nombre) - ((nombre) modulo (10))) / (10))
end

définir Heureux (naturel)
mettre [transformé] à (naturel)
répéter jusqu'à ce que <<(transformé) = (1)> ou <(transformé) = (4)>>
    Somme des carrés des chiffres (transformé)
    mettre [transformé] à (somme)
end

quand le drapeau est cliqué
mettre [compteur] à (0)
mettre [indice] à (0)
répéter (999) fois
    mettre [indice] à ((indice) + (1))
    mettre [nombre] à (indice)
    Heureux (nombre)
    si <(transformé) = (1)> alors
        mettre [compteur] à ((compteur) + (1))
    end
end
```

À la fin du programme, la variable `compteur` est à 142.

Quelques commentaires. Le bloc de définition Somme des carrés des chiffres utilise l'opérateur modulo (10) pour obtenir le chiffre u des unités du nombre n traité ; on ajoute u^2

à la somme partielle des carrés des chiffres, puis on enlève u à n avant de diviser par 10 pour traiter le chiffre suivant (tant que le résultat est non nul) : le chiffre des dizaines de n est égal au chiffre des unités de $\frac{n-u}{10}$.

On aurait pu alternativement utiliser l'opérateur `lettre (indice) de (nombre)` qui donne directement accès au chiffre numéro `(indice)` du nombre `(nombre)`, ainsi que `longueur de (nombre)` qui donne le nombre de chiffres de son écriture en base 10.

Le bloc de définition `Heureux` répète la procédure « Somme des carrés des chiffres » jusqu'à ce qu'on arrive à 1 (le nombre de départ est alors un nombre heureux) ou à 4 (c'est alors un nombre malheureux, puisque 4 appartient à la boucle (1)). Le fait que le programme principal, qui appelle ce bloc pour tous les entiers jusqu'à une borne (999 dans l'exemple ci-dessus), se termine assure que tous les entiers jusqu'à la borne choisie sont heureux ou malheureux, dans le sens terminent sur 1 ou sur la boucle (1).

On obtient ainsi une preuve partielle (et informatique) de la conjecture énoncée à la question 3. de l'activité, partielle dans le sens où elle ne fonctionne que pour les entiers jusqu'à la borne choisie. On verra dans la Section suivante comment la preuve générale se ramène à cette preuve informatique partielle. Pour rendre cet argument plus visible, on pourra vérifier qu'en remplaçant 4 par 3 dans la condition à la ligne 9, le programme ne termine plus même avec une borne à 9 (il se met à tourner en rond dès qu'il teste 2).

Enfin, le programme principal teste le caractère heureux de chacun des entiers de 1 jusqu'à la borne choisie et incrémente un compteur dès qu'il trouve un nombre heureux. La valeur finale de la variable `compteur` indique donc le nombre de nombres heureux jusqu'à la borne choisie : on en trouve 142 jusqu'à 999, 1441 jusqu'à 9999 et, en patientant quelques dizaines de secondes, 14 376 jusqu'à 99 999. Il n'est pas inintéressant de constater que le programme n'est pas très rapide et de voir les valeurs des différentes variables être incrémentées petit à petit (du moins leur chiffre des centaines ou des milliers).

On pourrait bien sûr profiter du test du programme principal pour ajouter chacun des nombres heureux trouvés à une variable liste, pour construire la liste des nombres heureux jusqu'à la borne. Pour cela on ajoutera les commandes

```
Supprimer tous les éléments de la liste [liste-heureux]
```

```
ajouter (indice) à [liste-heureux]
```

respectivement entre les lignes 14 et15 et les lignes 19 et 20. On obtient que les 19 nombres heureux à au plus 2 chiffres sont :

1 7 10 13 19 23 28 31 32 44 49 68 70 79 82 86 91 94 97

4 Prolongement niveau lycée

Soyons un peu plus précis pour les lycéens. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $S(m)$ la somme des carrés des chiffres de l'écriture de m en base 10 et $(s_k(m))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$s_0(m) = m \quad \text{et, pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad s_{k+1}(m) = S(s_k(m))$$

Définition 1. Un entier naturel m non nul est *heureux* si la suite $(s_k(m))_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 à partir d'un certain rang. Il est *malheureux* si la suite $(s_k(m))_{k\in\mathbb{N}}$ prend successivement les valeurs de la boucle (1) à partir d'un certain rang.

Théorème 2. *Tout entier naturel non nul est heureux ou malheureux.*

Remarque 1. On aurait tout aussi bien pu reprendre la définition de *malheureux* donnée dans l'activité, comme la négation de heureux ; le théorème s'énoncerait alors : si m est malheureux, alors la suite $(s_k(m))_{k\in\mathbb{N}}$ prend successivement les valeurs de la boucle (1) à partir d'un certain rang.

Démonstration. La preuve est intéressante : elle combine une réduction du cas général à celui des entiers à au plus 3 chiffres et un calcul exhaustif sur ceux-ci pour terminer la démonstration, par exemple à l'aide du programme Scratch ci-dessus ou plus efficacement en écrivant un programme en `python`. C'est un schéma fréquent dans les preuves assistées par ordinateur.

Réduction. Pour la réduction aux entiers inférieurs à 1000, considérons un entier naturel N dont on note n le nombre de chiffres de l'écriture en base 10, sans zéro superflu à gauche, c'est-à-dire que N est strictement supérieur au plus grand nombre à $n-1$ chiffres en base 10 :

$$10^{n-1} - 1 < N \leq 10^n - 1 = \underbrace{999\cdots 9}_{n} \tag{2}$$

Et, comme chacun des n chiffres de N est au plus 9, on a

$$S(N) \leq 9^2 + 9^2 + \cdots + 9^2 = 81n \tag{3}$$

Propriété 3. *On a : $S(N) < N$ dès que $n \geq 4$.*

Démonstration. On commence par montrer par récurrence que $81n < 10^{n-1}$ pour tout $n \geq 4$.

(i) pour $n = 4$, $81 \times 4 = 324 < 1000 = 10^3$;

(ii) supposons que, pour un entier $n \geq 4$, $81n < 10^{n-1}$, alors

$$81(n+1) = 81n + 81 < 10^{n-1} + 81 \tag{4}$$

par l'hypothèse de récurrence et, comme $n \geq 4$, $10^{n-1} \geq 1000$ donc

$$\begin{aligned} 9 &< 10^{n-1} \\ 81 &< 9 \times 10^{n-1} = (10-1) \times 10^{n-1} \\ 81 &< 10^n - 10^{n-1} \\ 10^{n-1} + 81 &< 10^n \\ 81(n+1) &< 10^n \end{aligned}$$

en utilisant (4).

(iii) Conclusion : on a bien $81n < 10^{n-1}$ pour tout $n \geq 4$.

Soit $n \geq 4$. Comme $81n$ et 10^{n-1} sont des entiers, on déduit de ce qui précède que $81n \leq 10^{n-1} - 1$, donc par (3) et (2) :

$$S(N) \leq 81n \leq 10^{n-1} - 1 < N$$

ce qui prouve la Propriété 3. □

Remarque 2. On peut noter que la suite $(81n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 81 tandis que la suite $(10^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 10. On vérifie facilement, pour $(u_n)_n$ suite arithmétique de raison $r > 0$ et $(v_n)_n$ suite géométrique de raison $q > 1$, que si $v_{n_0} > u_{n_0}$ **et** $v_{n_0} \geq \frac{r}{q-1}$ pour un entier n_0, alors $v_n > u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

On déduit immédiatement le résultat suivant de la Propriété 3.

Corollaire 4. *Pour tout entier naturel non nul m, la suite $(s_k(m))_{k\in\mathbb{N}}$ prend des valeurs strictement inférieures à* 1000.

Démonstration. Ici on raisonne par l'absurde : supposons que, pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a $s_k(m) \geq 1000$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre de chiffres en base 10 de $s_k(m)$ est au moins égal à 4 et, par la Propriété 3 :

$$s_{k+1}(m) = S(s_k(m)) < s_k(m)$$

autrement dit la suite $(s_k(m))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Or une suite infinie d'entiers naturels (donc minorée par 0, et même par 1000 ici) ne peut pas être strictement décroissante, d'où la contradiction. □

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après le Corollaire 4, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $s_k(m) < 1000$. Or m est heureux (resp. malheureux) si et seulement si $s_k(m)$ l'est. On en déduit qu'il suffit de montrer que le Théorème 2 est vrai pour les entiers à au plus 3 chiffres.

Terminaison. Voici un programme `python` assurant le test exhaustif des entiers jusqu'à 999 (ou une autre borne en changeant la valeur affectée à n).

```python
def scc(x) :
    s=0
    for v in str(x) :
        s=s+int(v)**2
```

```
    return(s)

def heureux(x) :
    while (x != 1) and (x != 4) :
        x=scc(x)
    return x == 1

h=[]
n=999
for j in range(1,n+1) :
    if heureux(j) :
        h.append(j)
print(h)
```

Là encore, le fait que le programme termine prouve que tous les entiers testés arrivent sur 1 ou sur la boucle (1), c'est-à-dire que tous les entiers à au plus 3 chiffres sont heureux ou malheureux. □

Le programme affiche la liste des entiers heureux jusqu'à 999 :

[1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167, 176, 188, 190, 192, 193, 203, 208, 219, 226, 230, 236, 239, 262, 263, 280, 291, 293, 301, 302, 310, 313, 319, 320, 326, 329, 331, 338, 356, 362, 365, 367, 368, 376, 379, 383, 386, 391, 392, 397, 404, 409, 440, 446, 464, 469, 478, 487, 490, 496, 536, 556, 563, 565, 566, 608, 617, 622, 623, 632, 635, 637, 638, 644, 649, 653, 655, 656, 665, 671, 673, 680, 683, 694, 700, 709, 716, 736, 739, 748, 761, 763, 784, 790, 793, 802, 806, 818, 820, 833, 836, 847, 860, 863, 874, 881, 888, 899, 901, 904, 907, 910, 912, 913, 921, 923, 931, 932, 937, 940, 946, 964, 970, 973, 989, 998]

Il prend moins d'1 seconde pour le test jusqu'à 99 999 (il vaut alors mieux donner en sortie la longueur de la liste plutôt que la liste elle-même).

Variante « à la main ». Une vérification exhaustive à la main reste tout à fait possible ici, en particulier grâce à la nouvelle réduction suivante.

Propriété 5. *Le nombre d'entiers à tester pour la recherche exhaustive jusqu'à* 999 *est :*

$$\binom{9}{1}+\binom{10}{2}+\binom{11}{3}=219$$

Démonstration. Comme on l'a vu avec la question 4. de l'activité, l'ordre des chiffres et la présence de 0 parmi eux ne sont pas à prendre en compte pour le résultat. On peut donc ne considérer pour le test que les nombres à au plus 3 chiffres non nuls rangés dans l'ordre croissant. Il y en a 9 à 1 chiffres. À 2 chiffres, il y a en $\binom{9}{2}$ avec deux chiffres distincts et 9 qui sont multiples de 11, soit

$$9+\binom{9}{2}=9+9\times 4=9\times 5=\binom{10}{2}$$

Alternativement, on peut utiliser la formule donnant le nombre $C'_{n,k}$ de choix de k parmi n sans ordre, avec répétition possible :

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

donc $C'_{9,2} = \binom{10}{2}$. À 3 chiffres, cette formule donne $C'_{9,3} = \binom{11}{3}$. □

Il ne reste alors qu'à trouver une façon pratique de répartir ces 219 entiers entre tous les élèves d'une classe, qui en auront donc chacun moins d'une dizaine à tester à la main. Il est judicieux de commencer par les entiers à 1 ou 2 chiffres, de façon à pouvoir arrêter le calcul pour les entiers à 3 chiffres (les plus nombreux) dès que la suite atteint un nombre inférieur à 100 ; pour optimiser le "temps de calcul", on pourra garder en mémoire tous les termes de toutes les suites déjà traitées, là encore pour arrêter plus vite les calculs sur les autres suites.

5 D'autres pistes

5.1 Nombres heureux « en couple »

Une légère modification du code `python` ci-dessus permet de n'afficher que les nombres heureux qui se suivent de près (d'écart 1) :

[31, 32, 129, 130, 192, 193, 262, 263, 301, 302, 319, 320, 367, 368, 391, 392, 565, 566, 622, 623, 637, 638, 655, 656, 912, 913, 931, 932]

Environ un nombre heureux sur 5 jusqu'à 1000 apparaît dans cette sous-liste, ce qui n'est pas négligeable. On sait qu'il y a une infinité de nombres heureux (et même de nombres heureux qui tombent sur 1 en une étape d'après la réponse à la question `6.` de l'activité), les nombres heureux « en couple », c'est-à-dire dont le prédécesseur ou le successeur est heureux, sont-ils aussi en nombre infini ?

Alternativement, on pourrait appeler ces nombres heureux "jumeaux" par analogie avec les nombres premiers, ou même "siamois" comme ils sont encore plus proches que les premiers jumeaux. Quel que soit le nom qu'on leur donne, la question de leur infinité est ouverte à notre connaissance. Un test rapide donne les résultats suivants, où l'on observe un taux de nombres heureux « en couple » plus élevé et assez régulier pour les nombres entre 4 et 7 chiffres.

borne	999	9 999	99 999	999 999	9 999 999
en couple	28	476	4466	44362	429200
heureux	142	1441	14376	143070	1418853
rapport	0,197	0,330	0,311	0,310	0,302

Ces résultats très partiels semblent indiquer qu'on pourrait envisager de croire que les nombres heureux en couple sont en nombre infini, mais que le fait d'être « en couple » est loin d'être une condition essentielle pour être heureux !

5.2 Antécédents

Il est facile de voir que tout entier naturel non nul n est l'image d'un entier pour la fonction S « somme des carrés des chiffres ». En effet, un antécédent de n pour S est

$$\underbrace{111\ldots1}_{n} \tag{5}$$

Il s'ensuit que $S : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est surjective (ainsi que $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ puisque 0 est sa propre image). L'antécédent n'est pas unique en général, même si raisonne à l'ordre près des chiffres et sans tenir compte du chiffre 0 : dès que $n \geq 4$,

$$n = S(\underbrace{111\ldots1}_{n}) = S(\underbrace{111\ldots1}_{n-4}2)$$

La remarque (5) permet de construire une suite infinie strictement croissante de nombres heureux dont chaque terme est image du suivant par S :

$$1 \ - \ 10 \ - \ \underbrace{1111111111}_{10} \ - \ \underbrace{1\ldots1}_{1111111111} \ - \ \ldots$$

Antécédent minimal. On sait donc trouver un antécédent de n'importe quel entier, est-il possible de trouver le plus petit possible ? Notons $A(n)$ l'ensemble des antécédents (immédiats) de n, on a évidemment $\min A(1) = 1$ (ou 10 si l'on veut le plus petit antécédent distinct de 1), $\min A(2) = 11$, $\min A(3) = 111$ car la présence d'un autre chiffre que 1 donne une valeur de S au moins 4 ; puis $\min A(4) = 2$, $\min A(5) = 12$, $\min A(6) = 112$ et $\min A(7) = 1112$ car dans ces trois derniers cas le seul "regroupement" de chiffres 1 possible à partir de l'écriture (5), pour faire un carré, est d'en regrouper 4 ensemble.

On pourrait penser qu'une bonne façon de trouver le plus petit antécédent d'un entier n est de l'écrire comme une somme de carrés d'entiers entre 1 et 9 les plus grands possibles, de manière à minimiser le nombre de chiffres de l'antécédent, c'est-à-dire à regrouper dans l'écriture (5) le plus possible de chiffres 1 en blocs de 81, puis pour ceux qui restent en blocs de 64, de 49,... jusqu'à des blocs de 4 et des 1 isolés. Par exemple, le plus grand carré d'entier entre 1 et 9 inférieur ou égal à 18 est 16 et

$$18 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = S(114)$$

mais $18 = S(33)$ également et $33 < 118$. L'idée de décomposer le nombre en une somme de carrés les plus grands possibles ne donne donc pas toujours l'antécédent minimal. Le calcul de $\min A(n)$ pour n grand semble être un problème difficile.

Antécédent itéré minimal. Pour $k \geq 0$, quel est le plus petit nombre heureux $H(k)$ terminant sur 1 en k étapes exactement ? On vérifie facilement que :

$$H(0) = 1 \ , \quad H(1) = 10 \ , \quad H(2) = 13 \ , \quad H(3) = 23$$

Pour calculer les $H(k)$ suivants, on pourrait être tenté de considérer la suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{k+1} = \min(A(x_k))$ pour $k \geq 0$, mais c'est trompeur car on n'a pas nécessairement $x_k = H(k)$. En effet, le calcul des premiers termes redonne bien les valeurs de H ci-dessus : $x_0 = 1$, $x_1 = 10$, $x_2 = 13$, $x_3 = 23$, mais on trouve ensuite

$$x_4 = 1233 > 19 = H(4)$$

(en effet, $19 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$). On note de plus que la suite $(H(k))_k$ n'est pas monotone. Les termes suivants sont $H(5) = 7$ ($7 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$), $H(6) = 356$ ($356 \to 70 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$), $H(7) = 78999$ ($78999 \to 356 \to 70 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$).

Le terme $H(8)$ est moins facilement accessible, il est en tout cas supérieur à 10^8. Déterminer la suite $(H(k))_k$ ou des informations sur son comportement semble donc être un problème difficile !

6 Une référence

On pourra consulter la page

`https://blogdemaths.wordpress.com/2019/01/01/2019-annee-heureuse-annee-chanceuse/`

pour une autre introduction aux nombres heureux, ainsi que pour une présentation des nombres chanceux.