IREM de Limoges
Groupe de Brive
Conjectures et preuves

Activité n°4 : sommes de palindromes

1. En français un *palindrome* est un mot ou un ensemble de mots qui s'épelle de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche. Par exemple :

   été
   élu par cette crapule
   à l'étape, épate-la

   Connais-tu d'autres palindromes ?
2. En mathématiques, un *palindrome* est un entier naturel dont les chiffres sont les mêmes quand on le lit de gauche à droite et de droite à gauche. Par exemple :

   $$5\,885\ ;\ 127\,721\ ;\ 34\,543\ ;\ 151$$

   On parle aussi de nombre *symétrique* ou de nombre *miroir*.
   a) Quels sont les palindromes à 1 chiffre ? Combien y en a-t-il ?
   b) Trouve tous les palindromes à 2 chiffres. Combien y en a-t-il ? Ont-ils quelque chose de remarquable ?
   c) Quels sont les palindromes à 3 chiffres ? Combien y en a-t-il ?
3. Combien y a-t-il de palindromes à 4 chiffres, 5 chiffres, 6 chiffres... ?
4. Entiers à deux chiffres qui sont sommes de palindromes.
   a) On considère les nombres 44, 45, 46, 47, ... , 53 : peut-on les écrire comme somme de deux palindromes ?
   b) Qu'en est-il des suivants ?
   c) Donner tous les entiers à 2 chiffres qui ne sont pas somme de deux palindromes.
   d) Peuvent-ils s'écrire somme de trois palindromes ?
5. Entiers à trois chiffres qui sont sommes de palindromes.
   a) Quels entiers à 3 chiffres ne sont pas sommes de deux palindromes ?
   b) Peuvent-ils s'écrire somme de trois palindromes ?

Classe tes réponses aux questions 2a, 2b, 2c, 3, 4c, 4d, 5a, 5b dans le tableau page suivante.

C'est vrai, j'en suis sûr(e) ! Je pourrai le prouver si on me le demande	
Cela me semble vrai Je ne sais pas le prouver mais j'y crois	
Je ne me prononce pas Je me pose la question de savoir si c'est vrai ou pas	

Pour l'enseignant

1 Contexte

Le fait que tout nombre entier naturel s'écrive comme la somme de trois palindromes a été une conjecture jusqu'à ce que, tout récemment, trois mathématiciens : J. Cilleruelo, F. Luca et L. Baxter, découvrent une preuve de cette propriété (en toute base au moins égale à 5 qui plus est). Ce résultat a donné lieu à un article publié dans la revue *Mathematics of Computations* en 2018, on en reproduit deux extraits à la fin de ce document. La version preprint de l'article peut être librement consultée (et téléchargée) sur le dépôt `arXiv` à l'adresse :

`https://arxiv.org/pdf/1602.06208`

Cet article ne donne pas beaucoup d'informations sur l'origine de la conjecture, sinon qu'elle apparaît sous forme de question dans le blog de E. Friedman de juin 1999 (question #4), qu'on peut consulter à l'adresse :

`https://erich-friedman.github.io/mathmagic/0699.html`

Dans sa réponse, il donne le début de la liste des entiers qui ne sont pas sommes de deux palindromes (voir cette question dans les pistes complémentaires ci-dessous). À noter que, s'il n'y en a que 8 à deux chiffres et 1 seul à trois chiffres, ils sont énormément plus nombreux à 4 chiffres. Cette suite est répertoriée dans l'atlas en ligne des suites d'entiers (de Sloane) à l'adresse (mise à jour par rapport à celle indiquée dans le blog) :

`https://oeis.org/A035137`

Friedman indique également comment les mathématiciens J. De Vincentis et U. Schimke ont généralisé l'exemple 201 d'entier qui n'est pas somme de deux palindromes pour construire une famille infinie d'entiers avec cette propriété.

2 Mise en œuvre

Niveau des élèves. L'activité a été testée avec des élèves de 6^{e} de différents collèges (centre-ville et REP+), soit en accompagnement pédagogique, soit en classe entière. Elle a été très bien reçue par les élèves. À ce niveau, en une séance (1h), il semble raisonnable de traiter les questions 1 à 3 et de répartir les réponses dans le tableau en page 2. La deuxième séance pour traiter les questions suivantes était réclamée par les élèves.

À un niveau supérieur, par exemple avec des élèves de 3^{e}, on peut envisager de passer plus rapidement sur les questions 1 à 3 pour se concentrer sur les questions 4 et 5, plus difficiles, dont le classement des réponses dans le tableau devrait s'avérer plus intéressant.

Propriété, conjecture ou question. Le tableau en page 2 est le cœur de l'activité, il permet de prendre conscience des différents statuts des énoncés mathématiques qui émergent lors d'une recherche : propriétés (lorsqu'on peut donner une preuve), conjecture (lorsqu'on y croit mais qu'on ne sait pas prouver), ou simple question. Ces notions ne sont en général pas familières aux élèves, leur introduction nécessite un peu de temps. À noter que le tableau peut resservir pour toutes les activités proposées par le groupe « Conjectures et preuves » et plus généralement lors de toute activité de recherche en mathématiques.

L'objectif de l'activité n'est pas de déterminer précisément ce qu'est une démonstration en mathématiques (cela prendrait sans doute beaucoup plus de temps que celui de la scolarité toute entière !) même si cette question émergera probablement au moment de différencier les deux premières cases du tableau. Il ne s'agit pas d'y apporter une réponse définitive, mais plutôt de donner une idée de ce qu'on entend par « preuve » ou « démonstration » mathématique, en faisant sentir la nécessité d'apporter des arguments objectifs, recevables par les interlocuteurs, interrogeables par ceux-ci et de nature à les convaincre.

Il est à noter que cette première approche de la notion de démonstration permettra aux élèves, durant toute leur scolarité, de beaucoup mieux apprécier les différentes démonstrations qui leur seront présentées, notamment en géométrie ; mais aussi de mieux comprendre ce qu'on attend d'eux dans certains exercices.

Laïcité et citoyenneté. Plus largement, en introduisant la distinction entre ce qui, en mathématiques, est de l'ordre de la connaissance (les propriétés) ou de la croyance (les conjectures), cette activité permet de participer à travers l'enseignement des mathématiques à certains objectifs de formation de la conscience des élèves dans le domaine de la laïcité et de la citoyenneté. Elle permet une familiarisation avec la différentiation plus générale entre vérité et opinion évoquée dans le programme du cycle 4 [1] et donne aux élèves des outils, dans le cadre mathématique, pour déterminer par eux-mêmes ce qui relève de chaque catégorie.

3 Réponses aux questions

1. non, ici, ressasser, Anna, Ève, SMS, lol, ... voir :

   `https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_palindromes_fran%C3%A7ais`

2. a) Ce sont tous les nombres de 0 à 9, il y en a 10.

   b) Les palindromes à 2 chiffres sont les nombres à 2 chiffres identiques non nuls :

$$11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$$

   Il y en a donc 9. De plus, ce sont exactement les multiples de 11 (entre 1 et 100).

1. Volet 2, domaine 3, dans la version en vigueur à la rentrée 2020.

c) Les palindromes à 3 chiffres sont les nombres de la forme

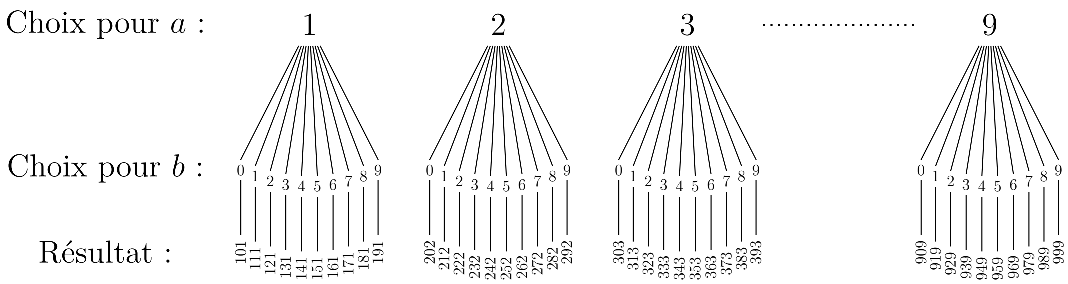
$$100a + 10b + a$$

où $a \in \{1, \ldots, 9\}$ et $b \in \{0, \ldots, 9\}$. Il y en a donc 90.

Il n'y a pas de critère de divisibilité comme pour les palindromes à 2 chiffres (les nombres divisibles par $111 = 3 \times 37$ sont des palindromes, mais aussi 101 qui est premier, $121 = 11^2$, 131 qui est premier, $141 = 3 \times 47$, 151 qui est premier, $161 = 7 \times 23$, ...).

On peut placer dans la case propriété (« J'en suis sûr ») les trois énoncés : les palindromes à 1 chiffre sont tous les entiers entre 0 et 9, il y en a 10 ; les palindromes à 2 chiffres sont les entiers 11, 22, 33, ... 99, c'est-à-dire les multiples de 11 à 2 chiffres, il y en a 9 ; les palindromes à 3 chiffres sont les nombres de la forme aba avec $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$, il y en a 90.

En effet, ces énoncés sont des conséquences assez directes de la définition de palindrome : tout nombre à 1 chiffre se lit de façon identique de gauche à droite et de droite à gauche ; pour que ce soit le cas pour un nombre à 2 chiffres, il faut et suffit que ses 2 chiffres soient identiques, ce qui en fait un multiple de 11 ; pour les nombres à 3 chiffres, il faut et suffit que les chiffres des unités et des centaines soient identiques (et donc non nuls, sinon ce ne serait pas un nombre à 3 chiffres). Il ne reste qu'à compter les possibilités, par exemple 9 choix pour a et, pour chacun de ces choix, 10 choix pour b, soit 90 possibilités pour les palindromes à 3 chiffres. L'occasion d'esquisser un arbre :



3. Il y a 10 palindromes à 1 chiffre, 9 à 2 chiffres, 90 à trois chiffres et 90 également à 4 chiffres.

On peut noter les bijections évidentes entre les ensembles de palindromes à 3 et 4 chiffres et $\{1, \ldots, 9\} \times \{0, \ldots, 9\}$:

$$\begin{array}{ccccc} \{1, \ldots, 9\} \times \{0, \ldots, 9\} & \rightarrow & \{\text{pal. à 3 chiffres}\} & \rightarrow & \{\text{pal. à 4 chiffres}\} \\ (a, b) & \mapsto & 100a + 10b + a & \mapsto & 1000a + 110b + a \end{array}$$

De même, il y a 900 palindromes à 5 chiffres et 900 palindromes à 6 chiffres, 9000 à 7 chiffres et 9000 à 8 chiffres, ...

On peut noter dans la case propriété du tableau les énoncés donnant les nombres de palindromes à 4, 5 et 6 chiffres (respectivement 90, 900 et 900) ; ou y inscrire la propriété plus générale : soit $n \geq 2$ un entier naturel, le nombre de palindromes à n chiffres est $9 \times 10^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$.

(En notant $\lfloor x \rfloor$ la partie entière (inférieure) d'un nombre réel x.)
En effet, si $n = 2k$ est pair, il y a par symétrie k chiffres à choisir, dont l'un est non nul, d'où $9 \times 10^{k-1}$ possibilités, et $k - 1 = \lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor$; si $n = 2k + 1$ est impair, il faut en plus choisir le chiffre du milieu, d'où le résultat puisqu'alors $k = \lfloor \frac{2k+1-1}{2} \rfloor$

4. a) Oui : $44 = 44 + 0$, $45 = 44 + 1$, $46 = 44 + 2$, ..., $53 = 44 + 9$ sont sommes de deux palindromes (l'un à 2 chiffres et l'autre à 1 chiffre).

   b) Ce n'est pas le cas pour 54 : il n'est pas somme d'un palindrome à 2 chiffres et d'un palindrome à 1 chiffre car le plus grand palindrome inférieur à 54 est $44 = 54 - 10$; il n'est bien sûr pas non plus somme de deux palindromes à 1 chiffre (une telle somme vaut au plus 18). Il n'est pas non plus somme de deux palindromes à 2 chiffres (la somme de deux multiples de 11 est un multiple de 11), donc 54 n'est pas somme de deux palindromes.

   Par contre $55 = 55 + 0$, $56 = 55 + 1$, ..., $64 = 55 + 9$ sont sommes de deux palindromes, de même que tous les entiers de la forme

$$11a + b \quad \text{avec } a, b \in \{0, \ldots, 9\} \text{ et } 11a + b \leq 99$$

   c) Les seuls entiers à 2 chiffres qui ne sont pas de la forme ci-dessus sont ceux dont le reste dans la division par 11 est 10, c'est-à-dire de la forme $11a + 10$ avec $0 \leq a \leq 8$ (si $a = 9$ on dépasse 100). Parmi eux ($a = 0$), 10 est somme de deux palindromes à 1 chiffre. Par contre les suivants ($1 \leq a \leq 8$) sont compris entre 21 et 98 et ne sont donc ni sommes de deux palindromes à 1 chiffre (trop grands), ni d'un palindrome à 2 chiffres et d'un à 1 chiffre (le plus grand palindrome à 2 chiffres qui leur est inférieur ou égal est plus petit de 10), ni de deux palindromes à 2 chiffres (ils ne sont pas multiples de 11).

   Conclusion : les entiers à 2 chiffres qui ne sont pas sommes de deux palindromes sont les éléments de :

$$\{11a + 10\,,\ 1 \leq a \leq 8\} = \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$$

   On peut écrire dans la case propriété que les entiers à 2 chiffres qui ne sont pas sommes de deux palindromes sont 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

   d) Oui : soit a un entier entre 1 et 8, alors $11a + 10 = 11a + 9 + 1$ est somme de trois palindromes. Notons que cela marche aussi avec $a = 9$, donc jusqu'à 109. Comme on peut toujours ajouter 0 à une somme de 2 palindromes, on en déduit que tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 109 s'écrivent somme de trois palindromes.

   On place dans la case propriété du tableau l'énoncé : tout entier naturel inférieur ou égal à 109 s'écrit somme de 3 palindromes.

5. a) Tout entier à 3 chiffres s'écrit sous la forme $N = 100c + 10d + u$ avec $c, d, u \in \{0, \ldots, 9\}$ et $c \neq 0$. Comme pour les entiers à 2 chiffres, on peut considérer le plus grand palindrome inférieur ou égal à N :
   - si $c \leq u$, $N = (101c + 10d) + (u - c)$ est somme de deux palindromes ;

- si $c > u$ et $d \geq 1$, $N = \Big(101c + 10(d-1)\Big) + (10 + u - c)$ l'est également ;
- si $c > u$ et $d = 0$:
  - si $c > u + 1$, $N = \Big(101(c-1) + 90\Big) + (11 + u - c)$ est somme de deux palindromes ;
  - si $c = u + 1$: enlevons 101 au plus grand palindrome inférieur ou égal à N, on trouve
  $$N = \Big(101(c-2) + 90\Big) + (111)$$
  donc N est bien somme de deux palidromes dès que $c \geq 3$;
  - enfin si $N = 100$ ($c = 1$ et $u = 0$), $N = 99 + 1$ est somme de deux palindromes ; si $N = 201$ ($c = 2$ et $u = 1$), alors N n'est pas somme de deux palindromes à 1 ou 2 chiffres (il est trop grand) et la différence entre N et les palindromes à 3 chiffres plus petits n'est jamais un palindrome : $201 - 191 = 10$, $201 - 181 = 20$, $201 - 171 = 30$, ... en enlevant des dizaines supplémentaires, la différence sera augmentée de ces mêmes dizaines et ne pourra pas être un palindrome. Donc 201 n'est pas somme de deux palindromes.

Conclusion : 201 est le seul entier à 3 chiffres qui n'est pas somme de deux palindromes.

La rédaction de cette preuve n'est sans doute pas à la portée de la plupart des élèves du secondaire, si on veut la donner dans tous ses détails. Les arguments utilisés sont pourtant tout à fait à leur portée, et beaucoup les découvriront si on les laisse chercher suffisamment. Il pourra être utile de les guider, ce qu'on peut envisager d'au moins deux manières :

(i) en mettant en avant le principe utilisé à la question 4, qui consiste à considérer le plus grand palindrome inférieur ou égal au nombre qu'on veut décomposer ;

(ii) en leur donnant des entiers de chaque catégorie à essayer de découper en somme de deux palindromes : $458 = 454 + 4$, $854 = 848 + 6$, $804 = 797 + 7$, $807 = 696 + 111$, en cherchant à chaque fois à quels entiers s'étend la décomposition trouvée.

Selon les résultats de la recherche, on pourra conjecturer que tous les entiers à 3 sont sommes de deux palindromes, que 201 est le seul entier à 3 chiffres qui n'est pas somme de deux palindromes, voire même en faire une propriété si on a pu se rapprocher suffisamment d'une preuve convaincante.

b) $201 = 191 + 9 + 1$ est somme de trois palindromes.

L'étude précédente devrait permettre de placer dans la case propriété l'énoncé : tout entier à 3 chiffres est somme de trois palindromes.

4 Pistes complémentaires

Question 1. *La somme de deux palindromes à 2 chiffres est-elle encore un palindrome ?*

La somme de deux palindromes à 2 chiffres est encore un multiple de 11 : écrivons-les $11a$ et $11b$ où $a, b \in \{1, \dots, 9\}$, alors leur somme S vaut $11(a+b)$ et $2 \leq a+b \leq 18$, donc

$$S \in \{11n\,,\ 2 \leq n \leq 18\} = \{22, 33, \dots, 99, 110, 121, 132, 143, \dots, 198\}$$

et on voit que S est un palindrome exactement quand $a+b \leq 9$ ou $a+b = 11$.

Plus en détail :

– il est clair que S est un palindrome si $a+b \leq 9$;

– si $a+b \geq 10$, soit $c \in \{0, \dots, 8\}$ tels que $a+b = 10+c$. On a

$$S = 11(10+c) = 110 + 11c = 100 + 10(1+c) + c$$

donc comme $1+c \leq 9$, le chiffre des centaines de S est 1 et son chiffre des unités est c, donc dans ce cas S est un palindrome si et seulement si $c = 1$, c'est-à-dire $a+b = 11$.

Plus généralement, les multiples M de 11 par des nombres à deux chiffres $10d+c$ avec $d \in \{1, \dots, 9\}$ et $c \in \{0, \dots, 9\}$ sont de la forme

$$M = 11(10d+c) = 100d + 10(d+c) + c$$

donc M est un palindorme si et seulement si ($d+c \leq 9$ et $d = c$) ou ($d+c \geq 10$ et $d+1 = c$).

Par exemple, $11 \times 22 = 242$ et $11 \times 56 = 616$ sont des palindromes.

Question 2. *La somme de deux palindromes à* 3 *chiffres est-elle encore un palindrome ?*

Donnons-nous deux palindromes à 3 chiffres : $100a + 10b + a$ et $100c + 10d + c$, avec $a, c \in \{1, \dots, 9\}$ et $b, d \in \{0, \dots, 9\}$, alors leur somme S vaut :

$$S = 100(a+c) + 10(b+d) + (a+c)$$

On peut donc facilement énoncer une *condition suffisante* :

Propriété 4.1. *S est un palindrome s'il n'y a pas de retenue, c'est-à-dire si $a+c$ et $b+d$ sont inférieurs ou égaux à* 9.

Étudions les cas avec retenue : si $a+c \geq 10$, $S \geq 1000$ et son chiffre des milliers vaut 1 ; comme son chiffre des unités est celui de $a+c$, il faut nécessairement que $a+c = 11$ pour que la somme puisse être un palindrome. Supposons donc $a+c = 11$, la somme peut s'écrire :

$$1 \text{ millier } + 1 \text{ centaine } + 10(b+d+1) + 1$$

et on obtient le palindrome 1111 si $b = d = 0$ (par exemple $1111 = 404 + 707$). Si $b+d+1 \neq 1$, on ne peut avoir un palindrome que si $b+d+1 \geq 10$, auquel cas la somme s'écrit :

$$1 \text{ millier } + 2 \text{ centaines } + 10(b+d+1-10) + 1$$

et il est clair qu'il faut que $b + d - 9 = 2$, c'est-à-dire $b + d = 11$. Par exemple $454 + 767 = 1221$.

Enfin le cas où $a + c \leq 9$ et $b + d \geq 10$ présente deux sous-cas : si $a + c \leq 8$, il n'y a pas de milliers dans la somme et le nombre de centaines, $a + c + 1$, est différent de celui des unités, $a + c$; si $a + c = 9$, la somme s'écrit :

$$1 \text{ millier } + 10(b + d - 10) + 9$$

qui ne peut pas être un palindrome puisque les chiffres des unités et des milliers sont distincts.

On a donc le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Soient a, b, c, d des entiers naturels avec $a, c \in \{1, \ldots, 9\}$ et $b, d \in \{0, \ldots, 9\}$. Alors la somme des palindromes $100a + 10b + a$ et $100c + 10d + c$ est un palindrome exactement dans les cas suivants :*

(i) $a + c \leq 9$ *et* $b + d \leq 9$ *;*

(ii) $a + c = 11$ *et* $b = d = 0$ *;*

(iii) $a + c = b + d = 11$.

Le cas (i) donne tous les palindromes à 3 chiffres entre 202 et 999 ; le cas (ii) donne 1111 ; le cas (iii) donne 1221. Il n'y a donc que deux palindromes à 4 chiffres qui sont sommes de deux palindromes à 3 chiffres !

5 Annexe

On reproduit ici deux extraits de l'article de Cilleruelo, Luca et Baxter.

MATHEMATICS OF COMPUTATION
Volume 87, Number 314, November 2018, Pages 3023–3055
http://dx.doi.org/10.1090/mcom/3221
Article electronically published on August 15, 2017

EVERY POSITIVE INTEGER IS A SUM OF THREE PALINDROMES

JAVIER CILLERUELO, FLORIAN LUCA, AND LEWIS BAXTER

Abstract. For integer $g \geq 5$, we prove that any positive integer can be written as a sum of three palindromes in base g.

1. Introduction

Let $g \geq 2$ be a positive integer. Any nonnegative integer n has a unique base g representation, namely

$$n = \sum_{j \geq 0} \delta_j g^j, \quad \text{with} \quad 0 \leq \delta_j \leq g-1.$$

The numbers δ_i are called the *digits of n in base g*. If l is the number of digits of n, we use the notation

$$n = \delta_{l-1} \cdots \delta_0, \tag{1.1}$$

where we assume that $\delta_{l-1} \neq 0$.

Definition 1.1. We say that n is a base g palindrome whenever $\delta_{l-i} = \delta_{i-1}$ holds for all $i = 1, \ldots, m = \lfloor l/2 \rfloor$.

Figure 1 – Le haut de la première page...

Theorem 1.2. *Let $g \geq 5$. Then any positive integer can be written as a sum of three base g palindromes.*

The case $g = 10$ of Theorem 1.2 is a folklore conjecture which has been around for some time [8,9]. The paper [8] attributes a stronger conjecture to John Hoffman, namely that every positive integer n can be written in base $g = 10$ as a sum of three palindromes where one of them is the maximal palindrome less than or equal to n itself. This was refuted in [12], which provided infinitely many examples of positive integers n which are not a sum of two decimal palindromes.

However, we prove that "many" positive integers are a sum of two palindromes.

Theorem 1.3. *Let $g \geq 2$. There exists a positive constant c_1 depending on g such that*

$$|\{n \leq x : \ n = p_1 + p_2, \ p_1 \text{ and } p_2 \text{ are base } g \text{ palindromes}\}| \geq x^{1-\frac{c_1}{\sqrt{\log x}}}$$

for all $x \geq 2$.

On the other hand the set of integers which are not the sum of two palindromes has positive density.

Theorem 1.4. *For any $g \geq 3$ there exists a constant $c < 1$ such that*

$$|\{n \leq x : n = p_1 + p_2, \ p_1 \text{ and } p_2 \text{ are base } g \text{ palindromes }\}| \leq cx$$

for x large enough.

We do not know whether the set of positive integers which are the sum of two base g palindromes has positive density.

FIGURE 2 – ... et celui de la deuxième.