IREM de Limoges
Groupe de Brive
Conjectures et preuves

Activité n°3 : suites de type Fibonacci

1. Chaque élève choisit 2 nombres et en construit 4 autres en additionnant le 1^{er} et le 2^{e}, puis le 2^{e} et le 3^{e}, le 3^{e} et le 4^{e}, etc.
2. il calcule la somme des six nombres qu'il divise par le 5^{e} nombre ;
3. il recommence sur un 2^{e} exemple...

Quelle(s) remarque(s) peut-on dégager après avoir appliqué cette procédure à plusieurs couples de nombres entiers ? Classer ces remarques dans le tableau ci-dessous.

C'est vrai, j'en suis sûr(e) ! Je pourrai le prouver si on me le demande	
Cela me semble vrai Je ne sais pas le prouver mais j'y crois	
Je ne me prononce pas Je me pose la question de savoir si c'est vrai ou pas	

Pour l'enseignant

1 Réponses

1. Prenons les nombres entiers 0 et 1 et notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue en posant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

   C'est la suite de Fibonacci ! On a

$$u_2 = 1 \ , \quad u_3 = 2 \ , \quad u_4 = 3 \ , \quad u_5 = 5$$

   et on note que le 5^{e} terme de la suite est $u_4 = 3$.

2. On calcule :

$$\frac{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5}{u_4} = \frac{12}{3} = 4$$

3. Recommençons avec les nombres $v_0 = 2$ et $v_1 = 10$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout entier n :

$$v_2 = 12 \ , \quad v_3 = 22 \ , \quad v_4 = 34 \ , \quad v_5 = 56$$

   et

$$\frac{v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5}{v_4} = \frac{136}{34} = 4$$

On a trouvé le même résultat sur les deux exemples : 4.

On peut déjà placer dans la première case du tableau (« J'en suis sûr ») l'énoncé : si on part de 0 et 1 ou de 2 et 10, le résultat est 4.

En effet, la preuve de cet énoncé est un simple calcul (une série de calculs plus exactement) dont il suffit de vérifier qu'il est correct.

On peut aussi poser la question (3^{e} case du tableau) : trouve-t-on toujours 4 ? Si de plus on met ensemble les résultats de tous les élèves qui, sauf erreur de calcul, auront toujours trouvé 4, on peut émettre la conjecture (2^{e} case du tableau) : le résultat est toujours 4.

Ici, c'est le grand nombre d'exemples montrant tous le même comportement qui autorise à émettre une conjecture, c'est-à-dire à penser que le résultat est vrai en toute généralité.

2 Démonstration

Pour passer à la case supérieure du tableau, il faut réussir à prouver le résultat en toute généralité (on va se contenter de le prouver pour des entiers mais la preuve serait la même pour des nombres réels ou complexes). Cette preuve peut servir d'introduction au calcul littéral (et de motivation pour la calcul littéral) ou d'entraînement au calcul littéral pour des élèves qui le connaissent déjà.

Propriété 1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'entiers définie par la relation de récurrence :* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ *pour tout entier naturel* n*. On suppose que* $u_4 \neq 0$*, on a :*

$$\frac{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5}{u_4} = 4$$

Démonstration. Notons $u_0 = a$ et $u_1 = b$ les deux premiers termes de la suite. On calcule de proche en proche :

$$u_2 = a + b\ , \quad u_3 = a + 2b\ , \quad u_4 = 2a + 3b\ , \quad u_5 = 3a + 5b$$

donc

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 &= a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) \\ &= 8a + 12b \\ &= 4(2a + 3b) \\ &= 4u_4 \end{aligned}$$

et le résultat est prouvé ! □

On a même prouvé un peu plus que l'énoncé ci-dessus, puisque la preuve établit l'égalité $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 4u_4$ même dans le cas où $u_4 = 0$.

3 Commentaires

Cette activité est relativement simple pour ce qui est du traitement des énoncés mathématiques induits par la recherche proposée. En effet, assez peu de faits remarquables émergent au cours de la recherche, essentiellement ceux qu'on a listés ci-dessus :

— des propriétés du type : si on commence par 0 et 1, on trouve 4 ;

— la question : trouve-t-on toujours 4 ?

— ... remplacée quand on suffisamment d'exemples pour y croire par la conjecture : on trouve toujours 4.

Cette dernière étant remontée dans la case propriété dès qu'on peut en faire la preuve. Le travail de différenciation entre question, conjecture et propriété se fait donc essentiellement sur un énoncé, ce qui permet de bien expliquer les divers types possibles avant de confronter les élèves à des situations où ils devront classer de nombreux énoncés différents.

Il n'est bien sûr pas obligatoire de faire la preuve pour que l'activité soit intéressante. On peut même envisager de la proposer aux élèves de 6e pour une première approche des différents types d'énoncés mathématiques, puis de leur reproposer deux ans plus tard en 4e pour, au choix, introduire et motiver le calcul littéral ou illustrer l'intérêt de celui-ci.

Notons aussi que l'activité engage et fait travailler la capacité des élèves à « prendre des initiatives » avec le libre choix de deux nombres dans les consignes 1 et 3. Les tests effectués en classe ont montré que cette liberté peut être un point de blocage pour de nombreux élèves. Il n'est pas inintéressant de les inciter à dépasser ce blocage dans la mesure où, dans de nombreuses situations mathématiques ou extérieures aux mathématiques, considérer un cas particulier, un exemple, permet souvent de se faire une première idée ou au moins de s'approprier le problème auquel on est confronté.