**IREM de Limoges**
Groupe de Brive
*Conjectures et preuves*

# Activité n°2 : persistance multiplicative

1. Choisir un nombre entier et lui appliquer la procédure suivante :
   a) effectuer le produit de ses chiffres
   b) recommencer avec le résultat
   c) et ainsi de suite...

   Quelle(s) remarque(s) peut-on dégager après avoir appliqué cette procédure à plusieurs nombres entiers ? Classer ces remarques dans le tableau page suivante.

2. Appliquer la procédure aux nombres suivants :
   a) 331
   b) 679
   c) 6 788
   d) 7 777 777 788

   Quelle(s) remarque(s) peut-on dégager de ces calculs ? Classer ces remarques dans le tableau page suivante.

3. Pour aller plus loin :
   a) Quels nombres arrivent sur 1 en fin de procédure ?
   b) Prouver que tous les nombres non nuls obtenus après la première étape de la procédure sont des entiers 10-*friables*, c'est-à-dire que leurs facteurs premiers sont tous inférieurs à 10.

   Quels énoncés mathématiques traduisent ces résultats ? Classer ces énoncés dans le tableau page suivante.

| | |
|---|---|
| **C'est vrai, j'en suis sûr(e) !**<br><br>Je pourrai le prouver si on me le demande | |
| **Cela me semble vrai**<br><br>Je ne sais pas le prouver mais j'y crois | |
| **Je ne me prononce pas**<br><br>Je me pose la question de savoir si c'est vrai ou pas | |

# Pour l'enseignant

## 1 Introduction

**Objectifs.** L'activité a un double objectif :

(i) faire découvrir aux élèves des énoncés mathématiques de différents statuts : propriétés, conjectures ou simples questions ;

(ii) les faire réfléchir au statut des énoncés qui ont été découverts : c'est à cet effet qu'on leur demande, à la fin, de classer leurs réponses (c'est-à-dire les énoncés qui ont été mis au jour) dans le tableau de la page 2.

Les rubriques du tableau tentent de donner une idée intuitive de ce qu'on entend par *propriété* (case « C'est vrai, j'en suis sûr »), *conjecture* (case « Cela me semble vrai ») ou simple *question* (case « Je ne me prononce pas »), avec dans chaque cas une phrase plus explicite pour préciser la formule retenue. Le vocabulaire lui-même n'est pas au programme du cycle 4 (ce qui bien sûr n'empêche pas de l'utiliser si on le souhaite), ce qui paraît important pour la suite des apprentissages mathématiques est de faire émerger chez les élèves la conscience que tous les énoncés (mathématiques, ou autres !) n'ont pas le même statut et de les entraîner, dans des cas simples, à déterminer le statut de tel ou tel énoncé.

Pour ne pas trop complexifier la tâche des élèves, nous avons choisi de ne pas ajouter de case « C'est faux, j'en suis sûr » ou « Je pense que c'est faux ». De telles cases ne sont pas forcément utiles dans la mesure où l'activité tend plutôt à faire émerger des énoncés dont on a des raisons de penser qu'ils sont vrais ou pour lesquels on n'a pas d'idée. Le travail de repérage de faits remarquables qui est alloué aux élèves sera sans doute plus facile à cadrer si l'on se restreint aux faits qu'on a des raisons de croire vrais et aux questions sur lesquelles on ne sait pas trancher, que si on ouvre la porte à tout ce qui est certainement faux...

Cependant, un énoncé qui paraît vrai à l'un pourrait paraître faux à un autre, ou se révéler faux plus tard, à la suite de recherches plus approfondies. Ce n'est pas un problème ! D'une part, les conjectures énoncées par les mathématiciens se révèlent parfois fausses (ce qui renforce l'intérêt de distinguer entre propriétés et conjectures, entre ce que l'on sait et ce que l'on croît être vrai). D'autre part, énoncer que quelque chose est faux équivaut, du point de vue logique, à énoncer que sa négation est vraie, on peut donc au travers d'un travail sur la négation s'arranger pour faire tout de même entrer ce qu'on souhaite dans une des cases déjà présentes.

Bien sûr, les utilisateurs de cette activité ont toute liberté de la remodeler à leur guise, et en particulier d'ajouter des cases au tableau si cela leur paraît pertinent.

**Contexte.** La *persistance multiplicative* d'un entier est le nombre d'étapes nécessaires pour arriver à un nombre à 1 chiffre en répétant la procédure « produit des chiffres de l'écriture en base 10 ». En effet, un nombre à 1 chiffre est invariant par cette procédure, qui s'arrête donc là.

Les exemples donnés permettent de découvrir des nombres de persistance 1, 3, 5 et 6 ; les exemples choisis au hasard donneront probablement aussi des nombres de persistance 2 ou 4 (en fait, dès qu'on a un nombre de persistance 6, on a des nombres de persistance de 0 à 5 en considérant les nombres trouvés aux étapes successives). On trouvera plus rarement des exemples de nombres de persistance au moins 7 et sans doute jamais de persistance $> 11$ : l'entier de plus grande persistance connu à ce jour est de persistance égale à 11 ; on conjecture que la persistance est bornée et même majorée par 11.

On verra apparaître dans la suite des arguments permettant de justifier que la persistance d'un nombre est finie. On donnera quelques indications sur les pistes de recherche actuelles en fin de document.

# 2 Réponses attendues

On note avec une simple flèche ( . $\rightarrow$ . ) le passage d'un nombre au produit des chiffres de son écriture en base 10.

1. Appliquons la procédure au nombre entier 4861 :

$$4861 \quad \rightarrow \quad 4\times 8\times 6\times 1 = 192 \quad \rightarrow \quad 1\times 9\times 2 = 18 \quad \rightarrow \quad 1\times 8 = 8$$

et on constate que 8 est fixe, donc la procédure s'arrête au bout de 3 étapes. On dit que la *persistance multiplicative* de 4861 est 3.

Quelques exemples supplémentaires :

$$\begin{aligned} 518 &\rightarrow 40 \rightarrow 0 \\ 3721 &\rightarrow 42 \rightarrow 8 \\ 8189 &\rightarrow 576 \rightarrow 210 \rightarrow 0 \\ 5433 &\rightarrow 180 \rightarrow 0 \\ 9328 &\rightarrow 432 \rightarrow 24 \rightarrow 8 \\ 1537 &\rightarrow 105 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

*Aide pour les élèves : on pourra autoriser la calculatrice.*

En mettant en commun les exemples considérés par les élèves, on peut comme à partir des quelques exemples ci-dessus se faire une première idée de la situation et énoncer certains faits remarquables (dont la rédaction peut être un travail collectif guidé par l'enseignant).

**Entiers fixes.** Le premier fait remarquable est que les nombres à 1 chiffre sont fixes pour la procédure, qui s'arrête donc lorsqu'on tombe sur un nombre à 1 chiffre.

On peut placer dans la $1^{\text{re}}$ case du tableau « J'en suis sûr » l'énoncé : les nombres à 1 chiffre (0, 1,... 9) sont fixes.

Il peut y avoir ici une difficulté pour comprendre comment la procédure qui a été décrite s'applique aux nombres à 1 chiffre. La procédure consiste à effectuer le produit de tous les chiffres de l'écriture en base 10 du nombre ; s'il n'y en a qu'un, il n'y a rien à faire ! On peut voir cela comme une convention ou remarquer que le nombre de multiplications à effectuer vaut le nombre de chiffres moins 1, donc vaut 0 pour les nombres à 1 chiffre. En tout cas, puisque la procédure ne fait rien aux nombres à 1 chiffre, ils sont fixes pour la procédure.

**Finitude.** Le 2[e] fait remarquable que nous mentionnons est moins évident et n'apparaîtra peut-être pas immédiatement : il s'agit de constater que les nombres qui apparaissent dans les étapes successives de la procédure sont de plus en plus petits ; cela apparaîtra peut-être plus clairement dans la question 2. où des nombres de persistance plus élevée sont proposés, nous y reviendrons à ce moment-là. De cela découle le fait que la persistance d'un entier est toujours finie, fait que l'on peut déjà observer sur nos exemples (même s'il n'attirera peut-être pas spontanément l'attention des élèves).

> On peut classer ce fait dans le tableau à la case question : « la persistance est-elle toujours finie ? » si on a un doute, ou à la case conjecture « la persistance d'un entier et toujours finie » si on y croît.

Le choix d'en faire une conjecture peut ici être justifié par le fait que *tous* les exemples considérés ont une persistance finie. On donnera une idée de preuve à la question 2.

**Lien avec la taille des nombres.** Non seulement la persistance semble finie, mais elle est toujours petite sur les exemples ci-dessus.

> On peut d'ores et déjà placer ce fait dans la case question (« Je ne me prononce pas ») du tableau, par exemple sous la forme : « La persistance multiplicative est-elle toujours inférieure ou égale à 3 ? à 10 ? à un certain entier à déterminer ? », ou dans la case conjecture (« J'y crois ! »), par exemple sous la forme (prudente) : « La persistance multiplicative est toujours inférieure ou égale à un certain entier à déterminer ».

Constatons sur cet exemple que la formulation d'une conjecture demande un effort de précision supplémentaire par rapport à celle d'une question, qui peut rester assez vague : la conjecture est un énoncé qu'on se propose d'essayer de prouver, il faut donc savoir précisément quel est l'objectif (quitte à modifier la conjecture si l'on s'aperçoit en cours de route qu'on a été trop ou pas assez optimiste).

Les exemples ci-dessus pourraient laisser penser que la persistance d'un entier est lié à sa taille : les nombres 518, 1537, 3721 et 5433 sont de persistance 2, alors que 4861, 8189 et 9328 sont de persistance 3 (les exemples choisis en classe seront certainement différents, cependant cette idée peut émerger tout de même). Le fait que $4861 < 5433$ amène rapidement à douter que ce soit si simple...

> On peut placer dans la case question l'énoncé : « Y a-t-il un lien entre la taille des nombres et leur persistance ? »

Il paraît par contre difficile de préciser suffisamment cette question pour en faire une conjecture... D'autres exemples peuvent être explorés pour préciser cette question, notamment ceux de la question 2.

**Évidences.** Les faits suivants peuvent paraître évidents.

Les énoncés suivants :

— les chiffres 1 peuvent être ignorés ;

— les chiffres 0 provoquent l'arrêt de la procédure ;

— un chiffre 5 et un chiffre pair provoquent l'apparition d'un 0,

peuvent classés dans la case propriété (« J'en suis sûr »).

Pour les énoncés « évidents », il n'est pas évident de savoir ce qu'on doit considérer comme une preuve ! Cela peut être l'énoncé d'une propriété connue qui justifie ce qu'on veut prouver, ici : 1 est élément neutre pour la multiplication (ou sous la forme : pour tout entier $n$, $1 \times n = n$) ; 0 est absorbant pour la multiplication (ou sous la forme : pour tout entier $n$, $0 \times n = 0$) ; enfin, si l'un des chiffres est 5 et qu'un autre est pair, leur produit sera un multiple de 10 donc le produit de tous les chiffres se terminera par un 0 (la multiplication est commutative et associative).

Dans le même ordre d'idées, on écrira également dans la case propriété, si ce fait est apparu, que l'ordre des chiffres ne change pas le résultat.

Ce qu'on peut justifier par le fait que la multiplication est commutative (ou sous la forme : pour tous entiers $n, m$, $n \times m = m \times n$).

**Terminaison.** Les seuls nombres à 1 chiffre qui sont apparus dans les exemples ci-dessus sont 0 et 8, ce qui pourrait là aussi donner lieu à une question ou à une conjecture (dépendant bien sûr des résultats trouvés dans chaque classe). Attention à la formulation, dans la mesure où les nombres à 1 chiffre sont leur propre image, ils sont forcément tous atteints ! D'après une remarque précédente, ils sont aussi images des nombres qui s'écrivent avec des 1 et eux-mêmes. Rédiger une question précise n'est pas facile ici, nous proposons les suivantes.

Certains nombres à un chiffre sont-ils atteints plus souvent que les autres ? Y a-t-il un lien entre la persistance d'un entier et le nombre à 1 chiffre sur lequel il termine ?

On reviendra sur ce sujet plus bas, notons déjà qu'on peut prouver (ce n'est pas évident !) que la persistance est toujours 1 pour les entiers qui terminent sur 1, 3, 7 ou 9.

2. On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
331 &\to 9\\
679 &\to 378 \to 168 \to 48 \to 32 \to 6\\
6788 &\to 2688 \to 512 \to 10 \to 0\\
7\,777\,777\,788 &\to 368\,947\,264 \to 1\,741\,824 \to 1792 \to 126 \to 12 \to 2
\end{aligned}$$

Le premier calcul montre que le nombre 9 n'est pas atteint que par les nombres dont tous les chiffes sont 1 ou 9 (ce qui paraît clair une fois qu'on l'a constaté !).

Le 2e et le 4e calcul montrent tout d'abord que la persistance n'est pas toujours aussi petite que sur les premiers exemples : 6 est le double de 3 ; le 2e calcul renforce aussi le scepticisme déjà apparu concernant le lien entre taille du nombre et persistance, d'autant plus en le faisant suivre du 3e calcul, portant sur un nombre 10 fois plus grand et de persistance inférieure.

**Valeurs de la persistance.** On connaît désormais des nombres de persistance 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On peut donc placer dans la case propriété l'énoncé : il existe des entiers de persistance $n$ pour tout entier $n$ entre 0 et 6.

C'est un calcul direct sur des exemples qui prouve cette propriété, il suffit donc de s'assurer que les calculs sont corrects. Noter qu'il suffit de vérifier le calcul sur le dernier exemple ci-dessus, qui fournit des nombres de persistance 0 (2), 1 (12), 2 (126)... et ainsi de suite jusqu'à 6 !

Ce résultat peut donner envie de se lancer dans une recherche exhaustive jusqu'à une certaine borne. On peut restreindre l'ensemble des nombres dont on doit calculer la persistance en utilisant les propriétés « évidentes » énoncés à la question 1. Cependant, si on veut mener les calculs assez loin, l'aide de l'ordinateur va s'avérer rapidement indispensable. On peut assez facilement programmer le calcul de la persistance à l'aide du logiciel SCRATCH au collège (voir plus loin) et encore plus à l'aide de `python` au lycée.

**Décroissance et finitude.** On dispose maintenant de suites assez longues pour remarquer plus nettement qu'elles sont strictement décroissantes.

Comme cela se vérifie sur tous les exemples, on peut placer dans la case conjecture l'énoncé : les nombres qu'on obtient en appliquant la procédure à un entier quelconque forment une suite finie strictement décroissante.

Cette conjecture entraîne que la persistance est finie car toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie (partant d'un entier $n \geq 0$, la suite compte au plus les $n+1$ termes $n$, $n-1$, $n-2$,... ,1, 0). On peut facilement donner une idée de preuve de la conjecture ci-dessus, en notant que $49 \to 4 \times 9 < 4 \times 10 \leq 4 \times 10 + 9$ et en généralisant à un entier quelconque. On y reviendra plus bas.

Sous réserve qu'on réussisse à écrire cette preuve, on place dans la case propriété les énoncés : les nombres qu'on obtient en appliquant la procédure à un entier quelconque forment une suite finie strictement décroissante ; la persistance d'un entier est finie.

Attention, certains pourraient être tentés de penser que le nombre de chiffres décroît strictement à chaque étape, ce qui n'est pas le cas d'après le 2e exemple ci-dessus ($679 \to 378 \to 168$).

3. Cette question est destinée à ouvrir des pistes de raisonnements plus sophistiqués.

a) Pour arriver sur 1 en 1 étape, il faut (et il suffit de) n'avoir que le chiffre 1 dans son écriture en base 10, c'est-à-dire être de la forme $111\dots11$ pour un nombre quelconque de chiffres. Ces nombres s'appellent des *répunits*. En effet, dès qu'un nombre contient un chiffre distinct de 1 dans son écriture en base 10, le produit des chiffres ne peut pas être égal à 1 (le seul élément *inversible* dans $\mathbb{N}$ est 1, c'est-à-dire que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $nm = 1 \implies n = m = 1$).

On peut placer dans la case propriété l'énoncé : les nombres de persistance 1 qui terminent sur 1 sont exactement les répunits.

Pour arriver sur 1 en au moins 2 étapes, il faut donc arriver sur un répunit à l'avant-dernière étape. On constate qu'aucun nombre n'arrive sur 11, car 11 est premier et ne peut donc pas s'écrire produit d'entiers entre 0 et 9 ; de même aucun nombre n'arrive sur $111 = 3 \times 37$, car 37 est premier et supérieur à 10 ; de même $1111 = 11 \times 101$ est produit de deux nombres premiers trop grands (supérieurs à 10).

À ce stade, on peut poser la question : existe-t-il des entiers non répunits qui terminent sur 1 par la procédure ? Voire même, si l'on regarde la décomposition de quelques répunits supplémentaires, énoncer la conjecture : les répunits sont les seuls entiers qui terminent sur 1.

Par exemple, on a les décompositions en produits de facteurs premiers :

$$11\,111 = 41 \cdot 271\ , \quad 111\,111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37\ , \quad 1\,111\,111 = 239 \cdot 4649$$

dans lesquelles il y a toujours au moins un facteur premier supérieur à 10.

Sous réserve qu'elle soit vraie, on déduit de la conjecture précédente que les nombres terminant sur 1 sont de persistance 1. La question suivante introduit une notion susceptible d'éclairer notre recherche.

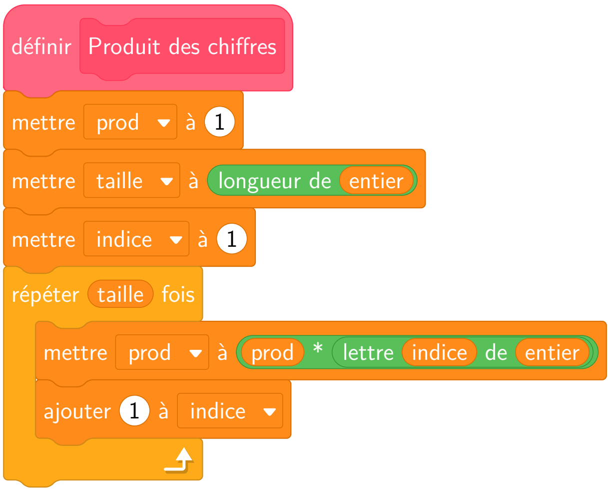
b) Le produit des chiffres de l'écriture d'un entier en base 10 est un produit d'entiers valant 0 ou 1 ou compris entre 2 et 9, donc dont les facteurs premiers sont nécessairement inférieurs à 10 (c'est-à-dire choisis parmi 2, 3, 5 et 7). Après la première étape de la procédure, on n'a donc affaire qu'à 0 ou à un entier 10-friable, c'est-à-dire dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à 10.

On place dans la case propriété l'énoncé : tout entier égal au produit des chiffres de l'écriture d'un entier en base 10 est 0 ou un entier 10-friable.

# 3 Compléments

On peut facilement programmer le calcul de la persistance multiplicative d'un entier, par exemple avec Scratch au collège. Dans le programme proposé ci-dessous, on a choisi de calculer le produit des chiffres d'un entier dans le bloc « Produit des chiffres » et d'appeler celui-ci dans le programme principal qui calcule la persistance en itérant le produit des chiffres.

On pourrait facilement faire du calcul de la persistance un deuxième bloc, qu'on utiliserait dans un autre programme pour calculer la persistance de tous les entiers entre deux bornes et pour en déduire le record de persistance dans cette tranche d'entiers. Un tel programme est suffisamment rapide pour être exploité sur de relativement grandes tranches (de 1 à 100 000 en quelques secondes, record de persistance 7 atteint par 68 889).





Noter l'opérateur lettre indice de entier qui donne directement accès au chiffre numéro indice du nombre entier, ainsi que longueur de entier qui donne le nombre de chiffres de son écriture en base 10.

## 4 Pour aller plus loin

**Finitude.** Commençons par écrire et prouver l'argument essentiel de la preuve de la finitude de la persistance. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $p_{10}(N)$ l'entier égal au produit des chiffres de l'écriture en base 10 de $N$.

**Propriété 1.** *Pour tout entier $N \geq 10$, $p_{10}(N) < N$.*

La propriété entraîne que la sous-suite des termes supérieurs ou égaux à 10 de la suite $\left(p_{10}^k(N)\right)_{k\geq 0}$ est strictement décroissante. Comme c'est une suite d'entiers naturels, cela entraîne qu'elle atteint un nombre $< 10$ (elle est ensuite constante), donc la persistance de $N$ est finie. Comme les entiers $< 10$ sont de persistance 1, on obtient que la persistance est finie sur $\mathbb{N}$.

*Démonstration.* Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $n$ le nombre de chiffres de son écriture en base 10. On suppose $N \geq 10$, c'est-à-dire $n \geq 2$. Pour tout entier naturel $k$, $10^k$ (qui s'écrit 1 suivi de $k$ fois le chiffre 0 en base 10) est le plus petit nombre à $k+1$ chiffres, donc

$$10^{n-1} \leq N < 10^n$$

Plus précisément, soient $c_1$,... $c_n$ les "chiffres" de l'écriture de $N$ en base 10, c'est-à-dire les entiers dans $\{0, \ldots, 9\}$ tels que $c_1 \neq 0$ et

$$N = c_1 \cdot 10^{n-1} + c_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + c_{n-1} \cdot 10 + c_n$$

On a donc $N \geq c_1 \cdot 10^{n-1}$ et, comme $n \geq 2$ :

$$p_{10}(N) = c_1 c_2 \ldots c_n \leq c_1 \cdot 9^{n-1} < c_1 \cdot 10^{n-1} \leq N$$

□

**Répunits.** Prouvons la conjecture de la question 3.a) : les répunits sont les seuls entiers qui terminent sur 1. D'après la propriété énoncée en 3.b) : tout entier égal au produit des chiffres de l'écriture d'un entier en base 10 est 0 ou un entier 10-friable, cela revient à montrer le résultat suivant.

**Propriété 2.** *Les répunits distincts de* 1 *ne sont pas* 10*-friables.*

*Démonstration.* Soit $N = 111\ldots1$ un répunit à $n \geq 1$ chiffres. Il n'est clairement pas multiple de 2 ni de 5 (car son chiffre des unités est 1, comme tous les autres) donc, si $N$ est 10-friable, il est forcément de la forme $3^a 7^b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.

Supposons donc que $N$ est 10-friable. D'après ce qui précède, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $N = 3^a 7^b$ et l'on a :

$$a > 0 \iff 3 \mid N \iff 3 \mid n$$

puisqu'un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres, c'est-à-dire son nombre de chiffres pour un répunit, l'est. Or $111 = 3 \times 37$, $111\,111 = 3 \times 37 \times 1001$ et, plus généralement :

$$111\,111\,\ldots\,111 = 111(1000^k + \cdots + 1000 + 1)$$

n'est pas 10-friable puisqu'il est divisible par 111 donc par le nombre premier 37. Autrement dit, si $3 \mid n$ alors $N$ n'est pas 10-friable. D'après notre hypothèse, il s'ensuit que $a = 0$ et $111\ldots1 = 7^b$. Considérons les premières puissances de 7 :

$$7^0 = 1\ , \quad 7^1 = 7\ , \quad 7^2 = 49\ , \quad 7^3 = 343\ , \quad 7^4 = 2401$$

On constate que $7^4 \equiv 7^0 \mod 100$, ce qui entraîne que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$7^k \equiv 7^r \mod 100$$

où $0 \leq r < 4$ est le reste de la division euclidienne de $k$ par 4. Autrement dit aucune puissance de 7 n'est congrue à 11 modulo 100, ce qui entraîne que $b = 0$ et $N = 1$ : le seul répunit 10-friable est 1. □

Écrivons les résultats qu'on en a déduits ci-dessus.

**Corollaire 3.** *Les répunits sont les seuls entiers qui terminent sur* 1*. Les nombres qui terminent sur* 1 *sont de persistance* 1*.*

**Antécédents.** Chercher un nombre de grande persistance peut se faire « à l'envers », en partant d'un entier à 1 chiffre et en essayant de lui trouver des antécédents successifs pour la procédure « produit des chiffres ». D'après la propriété énoncée à la question 3.b), cette chasse aux antécédents s'arrête dès qu'on tombe sur un nombre qui n'est pas 10-friable. Ce critère peut donc nous guider pour choisir le bon antécédent.

Par exemple, partons de 6. Pour écrire 6 comme un produit de "chiffres", il n'y a que deux choix : $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$ ; on peut ajouter autant de 1 que l'on veut et écrire ces chiffres dans n'importe quel ordre. En tout cas, 61 et 23 sont à exclure puisqu'ils sont premiers et donc non 10-friables, si l'on veut pouvoir remonter plus haut. Essayons avec $16 = 2 \times 8 = 4 \times 4$ et $32 = 4 \times 8$, les antécédents à 2 chiffres sont $28 = 4 \times 7$, $82 = 2 \times 41$ et $44 = 4 \times 11$ pour l'un, $48 = 2^4 \times 3$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ pour l'autre. On conserve 28, 48 et 84 comme antécédents de niveau 2 à 2 chiffres. Les seuls antécédents de niveau 3 à 2 chiffres sont 47 (premier) et $74 = 2 \times 37$, $68 = 4 \times 17$ et $86 = 2 \times 43$, il faut donc passer à 3 chiffres si l'on veut pouvoir continuer.

Parmi les antécédents à 3 chiffres de 28, écrits avec les chiffres 2, 2, 7 (3 possibilités) ou 1, 4, 7 (6 possibilités), un seul est 10-friable : $147 = 3 \times 7^2$. Aucun des 3 antécédents à 3 chiffres de 147 n'est 10-friable, ces nombres 377, 737 et 773 sont de persistance 4.

Un antécédent 10-friable à 3 chiffres de 84 est $672 = 2^5 \times 3 \times 7$. On peut envisager les antécédents suivants

$$2222237\ ,\quad 222437\ ,\quad 24437\ ,\quad 22837\ ,\quad 4837\ ,\quad 222267\ ,\quad 22467\ ,\quad 4467\ ,\quad 2867$$

ce qui, avec les permutations sur les chiffres, donne un grand nombre d'antécédents à tester ! Sans avoir mené une recherche exhaustive, nous avons pu nous rendre compte que les entiers 10-friables ne sont pas très nombreux : nous n'en avons trouvé aucun parmi tous ces antécédents. On obtient encore, avec n'importe lequel de ces antécédents, des nombres de persistance 4 terminant sur 6.

# 5 Encore plus loin : l'état de la recherche

Il y a une infinité d'entiers 10-friables, puisque ce sont tous les nombres de la forme $2^a 3^b 5^c 7^d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Par contre on conjecture que la liste des entiers 10-friables qui n'ont aucun de leur chiffre égal à 0 est finie (et qu'elle compte environ 12 000 nombres) ; que celle des entiers 10-friables qui n'ont ni 0 parmi leurs chiffres, ni couple composé d'un 5 et d'un entier pair, compte environ 3 000 nombres. Cette conjecture entraîne que la persistance est bornée (grossièrement par 12 000) et même que la persistance maximale est 11 pour les nombres entiers, valeur atteinte par les nombres :

$$277\,777\,788\,888\,899 \quad \text{et} \quad 27\,777\,789\,999\,999\,999$$

qui sont les plus petits entiers dont les produits des chiffres sont, respectivement, $2^{19} \times 3^4 \times 7^6$ et $2^4 \times 3^{20} \times 7^5$. On ne connaît pas d'autres "produits de chiffres" dont les antécédents sont de persistance 11.

Plus précisément, la conjecture permet de déterminer la persistance maximale en fonction du nombre sur lequel la procédure termine. Des recherches récentes ont permis de prouver que la persistance est 1 quand la procédure termine sur 1 (comme on l'a vu ci-dessus), 3, 7 ou 9 ; elles permettent aussi de déterminer la persistance des entiers pour lesquels la procédure termine sur 5.

**Sans les zéros.** Une variante de la procédure consiste à ignorer les chiffres 0 pour le produit des chiffres d'un nombre (ou à les remplacer par des 1, cela revient au même). Elle est due au mathématicien hongrois Erdös. On obtient par exemple :

$$25788 \to 4480 \to 128 \to 16 \to 6$$

donc 25788 a une persistance « à la Erdös » de 4 (au lieu de 2 pour la persistance classique).

Il a été conjecturé que la persistance multiplicative « à la Erdös » est bornée, tout comme dans le cas classique. Cependant cette conjecture est aujourd'hui remise en question, voire même considérée comme probablement fausse : sur la page `https://oeis.org/A014120` de l'*Encyclopédie en ligne des suites d'entiers* qui liste les plus petits entiers (prouvés jusqu'à 19, connus ensuite) de persistance « à la Erdös » $n$ pour $0 \leq n \leq 38$, l'auteur des commentaires écrit que « la conjecture selon laquelle cette suite est infinie semble sûre ». Le fait d'éliminer les zéros ne permet plus, en effet, de se restreindre aux entiers 10-friables qui n'ont pas de zéro parmi leurs chiffres, en quantité conjecturalement finie.

On verra sur cette page, ainsi que sur `http://ahonga.fr/js/pls430-nostat.html` (peut-être plus régulièrement mise à jour) qu'un des membres du groupe, Christophe Clavier, a fortement contribué à la recherche de nombres à grande persistance à la Erdös puisqu'il a exhibé les records actuels pour toutes les persistances à la Erdös entre 21 et 38 ! Il détient en particulier le record de persistance à la Erdös, 38, pour un entier d'environ 20 milliards de chiffres et s'attaque actuellement [1] à la persistance 39 sur des nombres de 43 milliards de chiffres, sans être certain que les calculs, prévus pour durer plusieurs mois, aboutissent un jour.

Plus près du record pour la persistance classique, on connaît les plus petits entiers de persistance à la Erdös 12 et 13, ils ont respectivement 26 et 53 chiffres. Celui de persistance 12 est

$$7(9)8(12)9(5) = 77\,777\,777\,788\,888\,888\,888\,899\,999$$

# 6 Quelques références

La persistance multiplicative a déjà été utilisée ou présentée par d'autres auteurs. Sur le site de l'académie de Nantes, on trouve une activité plutôt tournée vers l'algorithmique et la programmation (avec Scratch) :

`https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/groupe-de-recherche/actions-nationales-2015-2016/scratch-des-idees-a-prendre-ou-a-laisser--958976.kjsp`

... dont la source, pour les contenus, est le blog m@ths-et-tiques :

1. Rédigé en juin 2023.

https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/conjecture-de-la-persistance-des-nombres

... qui n'en dit pas beaucoup plus mais renvoie à de jolies illustrations de Jean-François Colonna :

http://www.lactamme.polytechnique.fr/images/PERM.11.D/display.html

... qui renvoie lui-même à un article de Jean-Paul Delahaye dans le numéro d'août 2013 de *Pour la science* (n° 430), qu'on pourra consulter en suivant les indications du haut de la page :

https://www.cristal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/

Cet article est, comme toujours avec cet auteur, très riche et très documenté (même si la recherche a un peu avancé depuis). Il semble avoir inspiré les auteurs de la page recensant les records de plus petits entiers de persistance à la Erdös entre 0 et 38, puisque le numéro du journal *Pour la Science* qui le contient apparaît dans l'adresse de la page :

http://ahonga.fr/js/pls430-nostat.html

Cette page donne un certain nombre de références supplémentaires (et propose un calculateur en ligne de persistance classique ou à la Erdös), notamment la page de l'*Encyclopédie en ligne des suites d'entiers* que nous avons citée plus haut :

https://oeis.org/A014120