Conjectures et preuves

Stéphane Vinatier
stephane.vinatier@unilim.fr

Université et IREM de Limoges

17 juin 2023

Sommaire

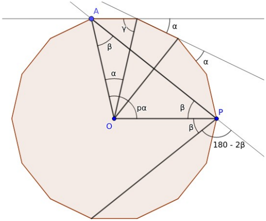
Le groupe

Les travaux présentés ont été réalisés par le groupe « Conjectures et preuves » de l'IREM de Limoges, composé de :

- Jessica Barrière, collège Cabanis à Brive-la-Gaillarde
- Christophe Clavier, université de Limoges
- Patrick Guillou, collège Ronsard à Limoges / retraité
- Guillaume Vergne, collège Jean Moulin à Brive-la-Gaillarde
- Stéphane Vinatier, université de Limoges

L'idée initiale

- Concevoir des activités pour faire formuler des conjectures par les élèves, notamment en utilisant des outils informatiques ;
- faire réfléchir les élèves à partir de ces conjectures : recherche d'idées (formulation, explication, débat) ;
- les faire cheminer vers la rédaction.



Sommaire

Préambule

Quelques extraits du préambule du programme de mathématiques du cycle 4 (de la rentrée 2018) :

> *Une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes. Mais pour être en capacité de résoudre des problèmes, il faut à la fois prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer en procédant par analogie, en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes (...)*
>
> *La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (...)*

Préambule (suite)

Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde. La démonstration, forme d'argumentation propre aux mathématiques, vient compléter celles développées dans d'autres disciplines et contribue fortement à la formation de la personne et du citoyen (domaine 3 du socle). L'apprentissage de la démonstration doit se faire de manière progressive, à travers la pratique (individuelle, collective, ou par groupes), mais aussi par l'exemple.

Préambule (suite)

Les deux extraits suivants concernent le *statut* des énoncés mathématiques.

> *Enfin, il vaut mieux déclarer « admise » une propriété non démontrée dans le cours (qui pourra d'ailleurs l'être ultérieurement), plutôt que de la présenter comme une « règle ». Une propriété admise gagne à être explicitée, commentée, illustrée. (...)*
> *En particulier, il est essentiel de distinguer le statut des énoncés (définition, propriété – admise ou démontrée –, conjecture, démonstration, théorème) et de respecter les enchaînements logiques.*

Les compétences

La pratique régulière et équilibrée de ces différentes activités (...) permet de développer six compétences spécifiques, qui sont les composantes majeures de l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Chercher

- extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances ;
- S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture ;
- tester, essayer plusieurs pistes de résolution ;
- décomposer un problème en sous-problèmes.

Raisonner

- résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions ;
- mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;
- démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;
- fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

Communiquer

- faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française ;
- expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange ;
- vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes.

Sommaire

Nos fiches d'activités

Le groupe a rédigé des fiches sur 5 thèmes :

	fiche élève	fiche enseignant	testé
nombres de Kaprekar	✓	✓	✓
persistance multiplicative	✓		✓
suites de type Fibonacci	✓		✓
sommes de palindromes	✓	✓	✓
les nombres heureux	✓	✓	

Deux autres activités ont été testées en 5e : somme des angles d'un triangle et nombre de régions du disque découpées par les cordes reliant un nombre de points donnés sur le cercle.

Structure

Les activités comportent deux étapes importantes :

- une consigne et une ou plusieurs questions à traiter : souvent un exemple pour commencer, des pistes pour aller plus loin… le but est que les élèves découvrent des *faits* plus ou moins remarquables ou intéressants ;
- une réflexion sur le statut des « énoncés » mathématiques découverts dans la 1re phase, à classer par les élèves dans le tableau page suivante…

Les deux phases peuvent être entremêlées : dès que suffisamment d'énoncés ont été découverts, on peut commencer à réfléchir à leur statut, en gardant les questions suivantes pour plus tard.

Statut des réponses

C'est vrai, j'en suis sûr(e) ! Je pourrai le prouver si on me le demande	
Cela me semble vrai Je ne sais pas le prouver mais j'y crois	
Y aurait-il un piège ? Je me pose la question de savoir si c'est vrai ou pas	

Le but du tableau est de donner aux élèves l'intuition des trois types d'énoncés mathématiques qui peuvent émerger après une recherche :

- Les propriétés, lorsqu'on a une *preuve* que l'énoncé est vrai ;
- les conjectures, lorsqu'on a de *bonnes raisons* de penser qu'il est vrai mais qu'on ne sait pas le prouver ;
- les questions qu'on est amené à se poser, lorsqu'aucune réponse ne semble plus plausible que les autres.

On note que seule la notion de propriété ne prête pas à discussion (encore que, un travail sur la validation des preuves peut être mené).

Conjecture ou question ?

La frontière est floue entre les deux derniers types d'énoncés. Pour choisir d'attribuer le statut de conjecture, on peut s'appuyer sur :

- l'analogie avec une situation similaire où la réponse est connue ;
- une preuve partielle, par exemple dans des cas particuliers ;
- le nombre d'exemples trouvés par les élèves pour lesquels la réponse est vraie.

La mise en commun des résultats de tous les élèves, s'ils confirment tous un même phénomène, pourra donner du sens à la différenciation entre question et conjecture.

La conjecture selon Fermat

Mais voici ce que j'admire le plus : c'est que je suis quasi persuadé que tous les nombres progressifs augmentés de l'unité, desquels les exposants sont des nombres de la progression double, sont nombres premiers, comme 3, 5, 17, 257, 65 537, 4 294 967 297 *et le suivant de* 20 *lettres* 18 446 744 073 709 551 617 *; etc. Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j'ai de si grandes lumières, qui établissent ma pensée, que j'aurois peine à me dédire.*

(cité par D. Perrin)

- Kaprekar :
  $1753 \to 7531 - 1357 = 6174 \to 7641 - 1467 =$

- Kaprekar :
$1753 \to 7531 - 1357 = 6174 \to 7641 - 1467 = 6174$;

- Kaprekar :
  $1753 \to 7531 - 1357 = 6174 \to 7641 - 1467 = 6174$;
- persistance multiplicative :
  $4861 \to 4 \times 8 \times 6 \times 1 = 192 \to 18 \to 8$ (3 étapes) ;

- Kaprekar :
  $1753 \to 7531 - 1357 = 6174 \to 7641 - 1467 = 6174$;
- persistance multiplicative :
  $4861 \to 4 \times 8 \times 6 \times 1 = 192 \to 18 \to 8$ (3 étapes) ;
- suite de type Fibonacci : choisir deux nombres u_0 et u_1, calculer u_2, ..., u_5 par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, alors

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_5}{u_4} = 4$$

- Kaprekar :
  $1753 \to 7531 - 1357 = 6174 \to 7641 - 1467 = 6174$;
- persistance multiplicative :
  $4861 \to 4 \times 8 \times 6 \times 1 = 192 \to 18 \to 8$ (3 étapes) ;
- suite de type Fibonacci : choisir deux nombres u_0 et u_1, calculer u_2, ..., u_5 par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, alors

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_5}{u_4} = 4$$

- palindromes : $201 = 191 + 9 + 1$ est somme de 3 palindromes (mais pas de 2) ;

- Kaprekar :
  $1753 \to 7531 - 1357 = 6174 \to 7641 - 1467 = 6174$;
- persistance multiplicative :
  $4861 \to 4 \times 8 \times 6 \times 1 = 192 \to 18 \to 8$ (3 étapes) ;
- suite de type Fibonacci : choisir deux nombres u_0 et u_1, calculer u_2, ..., u_5 par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, alors
  $$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_5}{u_4} = 4$$
- palindromes : $201 = 191 + 9 + 1$ est somme de 3 palindromes (mais pas de 2) ;
- nombres heureux :
  $44 \to 4^2 + 4^2 = 32 \to 3^2 + 2^2 = 13 \to 10 \to 1$

Sommaire

Activité palindrome

- testée en 6e, en AP (collège centre ville) et en classe entière travaillant en binômes (collège REP+) ;
- bonne adhésion des élèves, qu'ils soient motivés au départ ou non, voire même enthousiasme pour certains (cependant les élèves habituellement en réussite ont parfois eu du mal à quitter le confort des séances classiques) ;
- en 1h, seules les questions 1 à 3 ont été traitées, pour certaines avec des indications de l'enseignant ou la mise en commun des idées de tous ;
- le tableau a nécessité des explications supplémentaires.

Activité palindrome

- testée en 6e, en AP (collège centre ville) et en classe entière travaillant en binômes (collège REP+) ;
- bonne adhésion des élèves, qu'ils soient motivés au départ ou non, voire même enthousiasme pour certains (cependant les élèves habituellement en réussite ont parfois eu du mal à quitter le confort des séances classiques) ;
- en 1h, seules les questions 1 à 3 ont été traitées, pour certaines avec des indications de l'enseignant ou la mise en commun des idées de tous ;
- le tableau a nécessité des explications supplémentaires.

Certains élèves réclamaient une séance supplémentaire pour terminer l'activité !

Autres retours

- activité « suite de type Fibonacci » testée avec 2 classes de 5^{e} REP+ : la classe la plus faible a plus cherché et mieux réussi ; la classe plus forte n'a pas compris l'énoncé, les élèves rechignaient à se mettre dans une posture de recherche ;
- rédaction très différente selon les binômes, bonne participation orale collective (remplissage tableau et preuve) ;
- sur une 2^{e} activité faite à la suite (découpage du disque), les élèves montraient une bonne assimilation de la différence entre propriété et conjecture. Le tableau semble leur parler.

Commentaires des enseignants

Ces activités sont importantes à plusieurs niveaux :

Commentaires des enseignants

Ces activités sont importantes à plusieurs niveaux :

- elles remotivent des élèves qui se sentent en échec dans les activités mathématiques plus classiques, en permettant à de nouvelles compétences de s'exprimer (prise d'initiative,...) ;

Commentaires des enseignants

Ces activités sont importantes à plusieurs niveaux :

- elles remotivent des élèves qui se sentent en échec dans les activités mathématiques plus classiques, en permettant à de nouvelles compétences de s'exprimer (prise d'initiative,...) ;
- elles préparent les élèves aux démonstrations qu'ils verront en cours plus tard, notamment celles de géométrie en 4e et 3e ou celles du lycée ;

Commentaires des enseignants

Ces activités sont importantes à plusieurs niveaux :

- elles remotivent des élèves qui se sentent en échec dans les activités mathématiques plus classiques, en permettant à de nouvelles compétences de s'exprimer (prise d'initiative,...) ;
- elles préparent les élèves aux démonstrations qu'ils verront en cours plus tard, notamment celles de géométrie en 4^{e} et 3^{e} ou celles du lycée ;
- elles contribuent à l'éducation à la laïcité et à la citoyenneté : réfléchir sur la disctinction entre conjecture et preuve permet de comprendre, par analogie la différence entre croyance et connaissance.

Sommaire

Définitions

Nous nous sommes concentrés sur la distinction entre propriété, conjecture et questions. Les preuves apparaissent aussi naturellement dans l'activité, pour justifier le classement de certains énoncés dans la première case plutôt que dans la 2e, même si cet aspect n'est pas traité dans les fiches et est dévolu à l'enseignant qui mène la séance.

La rédaction des preuves peut aussi faire apparaître des énoncés de type définition, qui permettent souvent de clarifier, voire d'alléger, les démonstrations en introduisant les concepts appropriés.

Compétences travaillées

Ces exemples d'activités mettent en avant ou développent certaines notions propres au raisonnement et à la recherche mathématique :

- la prise d'initiative : *choisir un exemple et se lancer !*
- les capacités d'explication, de rédaction, de synthèse : *traduire des phénomènes observés en énoncés mathématiques* ;
- la capacité à discerner les statuts des énoncés : *question, conjecture, propriété, preuve, exemple, contre-exemple,...*
- la capacité à travailler sur un problème ouvert (*on ne sait pas où on va*) aussi bien que vers un objectif donné (*prouver une propriété*).

Institutionnalisation ?

On pourrait imaginer avoir tout un répertoire d'activités, pour chacune des notions listées ci-dessus, afin de :

- les faire découvrir aux élèves ;
- permettre aux élèves de les assimiler ;
- évaluer leur acquisition par les élèves.

Ce type d'activité pourrait alors intégrer le corps du programme de mathématiques du cycle 4 (et pas seulement le préambule) et être travaillé pour lui-même.

Institutionnalisation ?

On pourrait imaginer avoir tout un répertoire d'activités, pour chacune des notions listées ci-dessus, afin de :

- les faire découvrir aux élèves ;
- permettre aux élèves de les assimiler ;
- évaluer leur acquisition par les élèves.

Ce type d'activité pourrait alors intégrer le corps du programme de mathématiques du cycle 4 (et pas seulement le préambule) et être travaillé pour lui-même.

Est-ce souhaitable ?

Progression

On peut envisager d'expliciter des compétences plus sophistiquées, développées à partir de celles acquises au travers de ces activités :

- la capacité à organiser les idées, le raisonnement ;
- l'accès à un raisonnement modulaire où on sépare les tâches qui peuvent être traitées indépendamment ;
- la capacité à faire une hypothèse et à en déduire une conclusion (la brique de base du raisonnement déductif, par ex. pour montrer une équivalence par double implication) ;
- l'accès à des raisonnements plus sophistiqués, comme prouver qu'une assertion est équivalente à une autre qui contient une implication.