

CONJECTURES ET PREUVES

Stéphane VINATIER

enseignant-chercheur, université de Limoges

XLIM UMR 7252 CNRS – Univ. Limoges

stephane.vinatier@unilim.fr

Résumé

Nous décrivons les activités conçues par le groupe « Conjectures et preuves » de l'IREM de Limoges pour initier les élèves aux différents types d'énoncés mathématiques suivants : question, conjecture et propriété. Ces activités mettent les élèves en position de recherche en leur faisant appliquer des procédures relativement simples sur les nombres. Une des fiches d'activités conçues par le groupe figure en annexe en fin de document.

I - INTRODUCTION

Le groupe « Conjectures et preuves » de l'IREM de Limoges est composé actuellement de trois enseignants en collège :

- Jessica BARRIÈRE : collège Cabanis à Brive-la-Gaillarde
- Patrick GUILLOU : collège Ronsard à Limogers (désormais retraité)
- Guillaume VERGNE : collège Jean Moulin à Brive-la-Gaillarde

et de deux universitaires :

- Christophe CLAVIER et Stéphane VINATIER : université de Limoges

Même si sa composition a évolué au fil des années, ce groupe a une histoire propre de plus d'une décennie et la particularité de se réunir depuis ses débuts en Corrèze (à Tulle pendant longtemps, désormais à Brive).

Le thème du travail présenté au colloque de Talence provient d'ailleurs des travaux précédents du groupe. Mélangeant géométrie, arithmétique et programmation, l'idée était de motiver l'initiation à Scratch par la réalisation de polygones étoilés (inscrits dans des polygones convexes dans un second temps) et d'en profiter pour explorer leurs propriétés arithmétiques (surprenantes !). La recherche de procédures efficaces de tracé de ces figures a fait réfléchir les membres du groupe, qui se sont pris à tester diverses méthodes, conjecturer certaines propriétés et s'extasier quand le

programme qui en découlait produisait le résultat voulu, validant d'une certaine façon la conjecture et incitant à en chercher une preuve mathématique.

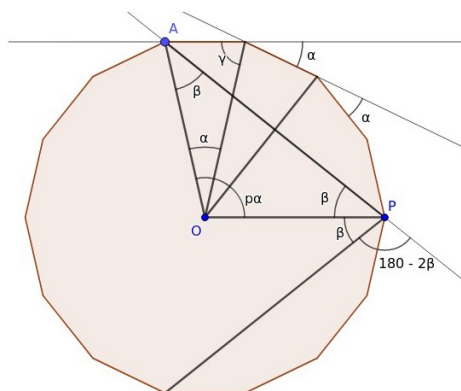


Figure 1. La mesure de l'angle de rotation du lutin au sommet d'un polygone étoilé.

Le caractère stimulant de cette activité de recherche imprévue a donné envie au groupe d'en faire profiter les élèves ! L'idée initiale était de concevoir des activités pour leur faire formuler des conjectures, notamment en utilisant des outils informatiques ; de les faire réfléchir à partir de ces conjectures : formulation d'énoncés, explications, débat ; et enfin de les faire cheminer vers la rédaction.

Comme on le verra, le produit final est un peu différent de ce qui était envisagé mais en conserve les idées principales.

II - AU PROGRAMME

Ce qui concerne le raisonnement en mathématiques apparaît essentiellement dans le préambule des programmes de mathématiques, et très peu voire pas du tout dans les contenus qui sont la partie sur laquelle se concentrent en général les enseignements, en particulier les évaluations. À cette réserve importante près, une bonne place est accordée à cet aspect essentiel de l'activité mathématique dans le programme du cycle 4 (de la rentrée 2018) que nous regardons maintenant de plus près.

1 Considérations générales

Citons quelques extraits du préambule du programme de mathématiques du cycle 4, en mettant en gras les passages où nous considérons que les activités que nous proposons peuvent contribuer à la réalisation des objectifs cités.

Une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes. Mais pour être en capacité de

*résoudre des problèmes, il faut à la fois **prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution** et s'y engager sans s'égarer en procédant par analogie, en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes (...)*

La prise d'initiative peut être tout simplement le choix d'un entier à 3 ou 4 chiffres, au début d'une activité, pour lui appliquer la procédure qui a été décrite. Ce simple choix d'un nombre parmi des centaines ou des milliers semble être un obstacle pour beaucoup d'élèves ! Ce qui montre la pertinence des activités en question pour travailler cette compétence, à la base de la résolution de nombreux problèmes. La recherche de « pistes de solution » apparaît un peu plus loin dans la plupart des activités, lorsqu'il faut expliciter ou expliquer les faits qui ont été observés sur un certain nombre d'exemples.

*La **formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (...)*

Nos activités sont centrées la distinction entre les statuts de « question », de « conjecture » ou de « propriété » pour un énoncé qu'on aura découvert, ce qui implique de travailler la notion de démonstration pour distinguer entre les deux derniers.

*Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde. La démonstration, forme d'argumentation propre aux mathématiques, vient compléter celles développées dans d'autres disciplines et **contribue fortement à la formation de la personne et du citoyen** (domaine 3 du socle). L'apprentissage de la démonstration doit se faire de manière progressive, à **travers la pratique (individuelle, collective, ou par groupes)**, mais aussi par l'exemple.*

Nous reviendrons sur le lien entre nos activités et la formation de la personne et du citoyen dans la partie IV.3, où nous faisons part des commentaires des enseignants qui ont testé les activités en classe.

2 Statut des énoncés mathématiques

L'extrait suivant peut paraître mystérieux en première lecture :

Enfin, il vaut mieux déclarer « admise » une propriété non démontrée dans le cours (qui pourra d'ailleurs l'être ultérieurement), plutôt que de la présenter comme une « règle ». Une propriété admise gagne à être explicitée, commentée, illustrée. (...)

Il nous semble être éclairé par le passage suivant qu'on trouve peu après :

*En particulier, il est essentiel de distinguer le statut des énoncés (**définition, propriété** – admise ou démontrée –, **conjecture, démonstration, théorème**) et de respecter les enchaînements logiques.*

Nous y voyons la volonté, dans l'esprit des concepteurs des programmes, que les mathématiques soient présentées autant que faire se peut aux élèves pour ce qu'elles sont, c'est-à-dire une construction logique dans laquelle les propriétés découlent des axiomes (et des propriétés déjà démontrées) par le raisonnement déductif. Là où le mot « règle » pourrait donner une impression d'arbitraire et d'autorité supérieure (la règle d'un jeu résulte des choix des concepteurs et sa validité n'a donc pas à être remise en question), l'expression « propriété admise » renvoie pensons-nous à ce système déductif dans lequel les propriétés peuvent être prouvées depuis les fondements, pour peu qu'on ait les connaissances adéquates des notions utilisées au cours du chemin déductif qui les relie. Il ne faut pas laisser penser faussement aux élèves qu'elles seraient imposées arbitrairement par une autorité supérieure (celle de l'enseignant ?).

Il s'agit donc de ne pas mettre les élèves sur une mauvaise piste concernant ce que sont les mathématiques. On voit qu'il s'agit aussi, plus précisément, de les amener à distinguer entre différents types d'énoncés mathématiques, que nous avons tous mis en gras dans le texte ci-dessus même si nos activités n'abordent pas spécifiquement la notion de définition (nous y reviendrons plus loin).

3 Compétences

Le préambule indique un certain nombre de types d'activités à mettre en œuvre en cours de mathématiques et continue comme suit.

*La pratique régulière et équilibrée de ces différentes activités (...) permet de développer six compétences spécifiques, qui sont les composantes majeures de l'activité mathématique : **chercher**, modéliser, représenter, **raisonner**, calculer, **communiquer**.*

Là encore nous faisons ressortir les compétences les plus visées par les activités que nous proposons. Nous verrons que, selon les choix pédagogiques faits par les enseignants (avec ou sans calculatrice, notamment), la plupart d'entre elles sont susceptibles de faire travailler fortement la compétence « calculer », même si ce n'est pas l'objectif principal.

Passons en revue les trois compétences que nous avons soulignées.

3.1 Chercher

Cette compétence est décrite comme suit dans le programme.

- *extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances ;*
- *S'engager dans une démarche scientifique, observer, **questionner, manipuler, expérimenter** (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), **émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture ;***
- ***tester, essayer plusieurs pistes de résolution ;***

- *décomposer un problème en sous-problèmes.*

Dans nos activités, l'expérimentation sera très présente et se fera essentiellement sur le papier : il s'agira de mener certaines procédures de calcul sur un ou plusieurs exemples. Le mot « hypothèse » paraît ambiguï ici : il semble être utilisé comme dans le contexte de la démarche scientifique, où il désigne un énoncé établi à partir des résultats d'une ou plusieurs expériences, qu'on va tenter de confirmer ou d'infirmer en menant d'autres expérimentations, pour lesquelles l'hypothèse devrait permettre de faire des prédictions de résultats ; alors que dans le contexte mathématique, le mot « hypothèse » indique plutôt les conditions de validité d'une propriété (par exemple, l'hypothèse du théorème de Pythagore est que le triangle soit *rectangle*, du moins dans son sens « direct »). Il nous semble qu'il serait plus approprié d'utiliser les expressions « poser des questions » et « émettre des conjectures », c'est ainsi que nous le comprenons en tout cas et c'est dans ce sens que nous le soulignons.

3.2 Raisonner

Cette compétence est décrite comme suit dans le programme.

- *résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions ;*
- ***mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;***
- ***démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;***
- ***fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.***

Noter le retour subreptice du mot « règle » banni un peu plus haut par le même programme... Difficile d'échapper aux termes couramment utilisés en français, même lorsqu'on voudrait employer un langage technique ! C'est d'ailleurs le premier point de la compétence suivante.

Nos activités peuvent toutes amener à mettre en commun les résultats des élèves, résultats de calculs ou de recherche, et donnent donc de nombreuses occasions de mettre en œuvre la recommandation du 2^e point ci-dessus. La nécessité de construire des démonstrations a déjà été évoquée. La validation des démonstrations trouvées pourra amener à travailler le dernier point.

3.3 Communiquer

Cette compétence est décrite comme suit dans le programme.

- *faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française ;*
- ***expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter***

dans l'échange ;

- *vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes.*

La différence entre le dernier item de la compétence « Raisonner » et le 2^e de celle-ci est sans doute subtile, ne cherchons pas à en savoir plus.

III - ACTIVITÉS

1 Fiches

Le groupe a rédigé des fiches d'activité sur les 5 thèmes suivants :

- nombres de Kaprekar (6 pages, reproduite en annexe)
- persistance multiplicative (13 pages)
- suites de type Fibonacci (4 pages)
- sommes de palindromes (11 pages)
- les nombres heureux (12 pages)

Depuis l'atelier, toutes les fiches ont été complétées et comportent maintenant une partie pour les élèves, destinée à guider leur travail, et une partie « enseignant » contenant des éléments de contexte, des réponses aux questions, des pistes pour aller plus loin. Toutes les fiches à l'exception de la dernière ont été testées, avec des élèves de 6^e, 5^e ou 4^e, en classe ou en AP, en collège de centre ville ou en REP+. Deux thèmes supplémentaires ont donné lieu à une activité similaire, proposée par l'un des enseignants du groupe à ses élèves, sur la somme des angles d'un triangle et sur le nombre de régions du disque découpées par les cordes reliant des points sur le cercle en nombre croissant (d'abord 1 région, puis 2, 4, 8, 16 et ... 31!).

2 Structure

Les activités comportent deux étapes importantes :

- une consigne et une ou plusieurs questions à traiter : souvent un exemple pour commencer, des pistes pour aller plus loin... le but est que les élèves découvrent des faits plus ou moins remarquables ou intéressants ;
- une réflexion sur le statut des « énoncés » mathématiques découverts dans la 1^{re} phase, à classer par les élèves dans le tableau ci-dessous.

Les deux phases peuvent être entremêlées : dès que suffisamment d'énoncés ont été découverts, on peut commencer à réfléchir à leur statut, en gardant les questions suivantes pour plus tard.

3 Tableau

Voici la version au moment de l'atelier du tableau proposé aux élèves pour classer les énoncés découverts :

<p>C'est vrai, j'en suis sûr(e) !</p> <p>Je pourrai le prouver si on me le demande</p>	
<p>Cela me semble vrai</p> <p>Je ne sais pas le prouver mais j'y crois</p>	
<p>Y aurait-il un piège ?</p> <p>Je me pose la question de savoir si c'est vrai ou pas</p>	

Le but du tableau est de donner aux élèves l'intuition des trois types d'énoncés mathématiques qui peuvent émerger après une recherche :

- Les *propriétés*, lorsqu'on a une preuve que l'énoncé est vrai ;
- les *conjectures*, lorsqu'on a de bonnes raisons de penser qu'il est vrai mais qu'on ne sait pas le prouver ;
- les *questions* qu'on est amené à se poser, lorsque aucune réponse ne semble plus plausible que les autres.

On note que seule la notion de propriété ne prête pas à discussion (encore que, un travail sur la validation des preuves peut aussi être mené). Certains participants à l'atelier ont tout de même suggéré qu'on ajoute une case pour les propriétés *fausses* (« C'est faux ! Je pourrais le prouver »), arguant que la manière de raisonner n'est pas la même pour prouver un énoncé selon qu'il est vrai ou faux. On pourrait alors aussi, par symétrie, ajouter une case pour ce qu'on conjecture être faux. Il nous semble cependant préférable de ne pas augmenter le nombre de lignes du tableau, ce qui complexifierait la tâche des élèves et risquerait de faire obstacle à leur compréhension des principaux types d'énoncés. On peut d'ailleurs toujours exprimer qu'une proposition est fautive en énonçant que sa négation est vraie. Enfin, nos activités, et peut-être même l'activité mathématique en général, nous semblent plutôt orientées vers la recherche de propositions vraies (même si parfois il faut se résoudre à constater que certaines conjectures ou propositions qu'on aurait aimées être vraies sont fausses).

La frontière est plus floue entre les deux derniers types d'énoncés, conjecture ou question. Pour choisir d'attribuer le statut de conjecture, on peut s'appuyer sur :

- l'analogie avec une situation similaire où la réponse est connue ;
- une preuve partielle, par exemple dans des cas particuliers ;
- le nombre d'exemples trouvés par les élèves pour lesquels la réponse est vraie.

La mise en commun des résultats de tous les élèves, s'ils confirment tous un même phénomène, pourra donner du sens à la différenciation entre question et conjecture.

4 Formulations

Nous reprenons de la conférence de Daniel Perrin la citation suivante de Pierre de Fermat, à propos des nombres qui portent son nom.

Mais voici ce que j'admire le plus : c'est que je suis quasi persuadé que tous les nombres progressifs augmentés de l'unité, desquels les exposants sont des nombres de la progression double, sont nombres premiers, comme 3, 5, 17, 257, 65 537, 4 294 967 297 et le suivant de 20 lettres 18 446 744 073 709 551 617 ; etc. Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j'ai de si grandes lumières, qui établissent ma pensée, que j'aurois peine à me dédire.

Voici une manière bien emphatique de décrire ce qu'est une conjecture ! Où l'on constate, de plus, qu'il ne suffit pas d'avoir des « grandes lumières » pour énoncer des conjectures solides... En effet Euler a établi en 1732 la factorisation :

$$4\ 294\ 967\ 297 = 641 \times 6\ 700\ 417$$

autrement dit le 5^e nombre de Fermat $F_5 = 2^{2^5} + 1$ est composé. On a vérifié depuis qu'il en va de même pour F_k jusqu'à $k = 32$ (et on ne sait pas pour les suivants).

Indiquons également que la formulation « Y aurait-il un piège ? » a semblé inadéquate à certains participants à l'atelier. Elle avait été choisie par le groupe à la suite de tests en classe en remplacement de la formule plus neutre « Je ne me prononce pas », pour traduire l'état d'esprit de certains élèves échaudés par des tentatives précédentes de conjectures qui se révélaient fausses. Dans la dernière version des fiches, on a remis la formule moins équivoque « Je ne me prononce pas ». Bien sûr les utilisateurs de fiches peuvent les remanier à leur guise.

5 Thèmes

Nous donnons maintenant quelques indications sur les thèmes traités. Pour des détails, on renvoie aux fiches elles-mêmes, à retrouver sur le site web de l'IREM de Limoges¹.

¹ Ainsi que sur la page www.unilim.fr/pages_perso/stephane.vinatier (Sommaire > IREM > groupes de recherche)

5.1 Nombres de Kaprekar

Ce thème est assez connu et apparaît dans d'autres fiches d'activités (avec des objectifs différents), plus souvent sous l'appellation « algorithme de Kaprekar ». Comme pour plusieurs des thèmes que nous présentons, il consiste à itérer une opération qui fait intervenir l'écriture en base 10 des entiers. Ici, on choisit un nombre à 4 chiffres (par exemple) et on soustrait le plus petit nombre qu'on peut écrire avec ces quatre chiffres au plus grand. Ainsi ;

$$1753 \text{ donne } 7531 - 1357 = 6174$$

$$6174 \text{ donne } 7641 - 1467 = 6174$$

et le processus s'arrête puisqu'on est arrivé sur un point fixe de l'opération (ce qui mettra plus de temps avec d'autres nombres de départ). Un tel point fixe est une *constante de Kaprekar*, que nous avons appelé ici *nombre de Kaprekar* (attention à la confusion avec une autre notion). La fiche complète est incluse en annexe.

5.2 Persistance multiplicative

On part de nouveau d'un entier écrit en base 10 et, cette fois, on fait le produit de ses chiffres :

$$4861 \text{ donne } 4 \times 8 \times 6 \times 1 = 192$$

$$192 \text{ donne } 1 \times 9 \times 2 = 18$$

$$18 \text{ donne } 1 \times 8 = 8$$

et le processus s'arrête puisqu'on arrive à un point fixe de l'opération (le produit des chiffres d'un nombre à 1 chiffre est égal à ce nombre). La *persistance multiplicative* de l'entier dont on est parti est le nombre d'étapes nécessaires pour arriver à un nombre à 1 chiffre : c'est 3 pour 4861.

5.3 Suites de type Fibonacci

On choisit deux nombres a et b et on calcule leur somme $c = a + b$, puis de proche en proche les sommes $d = b + c$, $e = c + d$, $f = d + e$; enfin, si e est non nul, on calcule $(a + b + c + d + e + f) / e$.

Cette activité plus simple peut servir d'introduction à ce type d'activités, ainsi qu'au calcul littéral dont elle illustre à merveille l'utilité et l'efficacité.

5.4 Palindromes

Un entier est un palindrome si on trouve le même nombre en renversant l'ordre des chiffres de son écriture en base 10, autrement dit si cette écriture est symétrique par rapport à son « centre ». On s'intéresse alors aux entiers qui s'écrivent somme de deux ou trois palindromes (en référence à un article récent qui prouve que tout entier est somme de trois palindromes). Par exemple, on

observe que $201 = 191 + 9 + 1$ est somme de trois palindromes mais pas de deux (c'est le seul entier à 3 chiffres dans ce cas).

5.5 Nombres heureux

L'opération à l'oeuvre ici consiste à faire la somme des carrés des chiffres de l'écriture en base 10 d'un entier :

$$44 \text{ donne } 4^2 + 4^2 = 32$$

$$32 \text{ donne } 3^2 + 2^2 = 13$$

$$13 \text{ donne } 1^2 + 3^2 = 10$$

$$10 \text{ donne } 1^2 + 0^2 = 1$$

et le processus s'arrête puisque 1 en est un point fixe. Les *nombres heureux* sont ceux qui terminent sur 1, comme 44.

IV - QUELQUES RETOURS

1 Palindromes

Cette activité a été testée en 6^e, en AP (collège centre ville) et en classe entière travaillant en binômes (collège REP+). Les enseignants ont noté une bonne adhésion des élèves, qu'ils soient motivés au départ ou non, voire même de l'enthousiasme pour certains ; cependant les élèves habituellement en réussite ont parfois eu du mal à quitter le confort des séances classiques. Le contenu de la fiche est très riche : en 1h, seules les questions 1 à 3 ont été traitées, pour certaines avec des indications de l'enseignant ou la mise en commun des idées de tous. Le tableau a nécessité des explications supplémentaires. Certains élèves réclamaient une séance supplémentaire pour terminer l'activité !

2 Retours sur d'autres activités

L'activité « suite de type Fibonacci » a été testée avec 2 classes de 5^e REP+ : la classe la plus faible a plus cherché et mieux réussi ; la classe plus forte n'a pas compris l'énoncé, les élèves rechignaient à se mettre dans une posture de recherche. L'enseignant fait état d'une rédaction très différente selon les binômes et d'une bonne participation orale collective (remplissage tableau et preuve).

Sur une 2^e activité faite à la suite (découpage du disque), les élèves montraient une bonne assimilation de la différence entre propriété et conjecture. Le tableau semble leur parler.

3 Commentaires des enseignants

Ces activités sont importantes à plusieurs niveaux :

- elles remotivent des élèves qui se sentent en échec dans les activités mathématiques plus classiques, en permettant à de nouvelles compétences de s'exprimer (prise d'initiative,...) ;
- elles préparent les élèves aux démonstrations qu'ils verront en cours plus tard, notamment celles de géométrie en 4^e et 3^e ou celles du lycée ;
- elles contribuent à l'éducation à la laïcité et à la citoyenneté : réfléchir sur la distinction entre conjecture et preuve permet de comprendre, par analogie la différence entre croyance et connaissance.

V - PERSPECTIVES

1 Définitions

Nous nous sommes concentrés sur la distinction entre propriété, conjecture et questions. Les preuves apparaissent aussi naturellement dans l'activité, pour justifier le classement de certains énoncés dans la première case plutôt que dans la deuxième, même si cet aspect n'est pas traité dans les fiches et est dévolu à l'enseignant qui mène la séance. La rédaction des preuves peut aussi faire apparaître des énoncés de type définition, qui permettent souvent de clarifier, voire d'alléger, les démonstrations en introduisant les concepts appropriés.

2 Compétences travaillées

Ces exemples d'activités mettent en avant ou développent certaines notions propres au raisonnement et à la recherche mathématique :

- la prise d'initiative : choisir un exemple et se lancer !
- les capacités d'explication, de rédaction, de synthèse : traduire des phénomènes observés en énoncés mathématiques ;
- la capacité à discerner les statuts des énoncés : question, conjecture, propriété, preuve, exemple, contre-exemple,...
- la capacité à travailler sur un problème ouvert (on ne sait pas où on va) aussi bien que vers un objectif donné (prouver une propriété).

3 Institutionnalisation ?

On pourrait imaginer avoir tout un répertoire d'activités, pour chacune des notions listées ci-dessus, afin de :

- les faire découvrir aux élèves ;
- permettre aux élèves de les assimiler ;

- évaluer leur acquisition par les élèves.

Ce type d'activité pourrait alors intégrer le corps du programme de mathématiques du cycle 4 (et pas seulement le préambule) et être travaillé pour lui-même. Réaliser un tel répertoire demanderait certainement un travail conséquent et, en retour, contribuerait fortement à l'acquisition des compétences visées par les élèves. D'un autre côté, l'institutionnalisation de ce type d'activité le rendrait peut-être moins attractif pour les élèves. Se pose donc la question de savoir si une telle institutionnalisation serait souhaitable ?

4 Progression

On peut envisager d'explicitier des compétences plus sophistiquées, développées à partir de celles acquises au travers de ces activités :

- la capacité à organiser les idées, le raisonnement ;
- l'accès à un raisonnement modulaire où on sépare les tâches qui peuvent être traitées indépendamment ;
- la capacité à faire une hypothèse et à en déduire une conclusion (la brique de base du raisonnement déductif, par ex. pour montrer une équivalence par double implication) ;
- l'accès à des raisonnements plus sophistiqués, comme prouver qu'une assertion est équivalente à une autre qui contient une implication.

VI - ANNEXE : FICHE D'ACTIVITÉ « NOMBRES DE KAPREKAR »

On inclut ci-dessous la fiche complète consacrée à l'algorithme et à la constante de Kaprekar (6174), ainsi qu'à ses analogues pour les nombres à 2 ou 3 chiffres. Elle contient :

- l'activité pour les élèves,
- les objectifs,
- un historique,
- les réponses aux questions,
- des variantes de l'algorithme

et quelques références sur internet.

Activité n°1 : nombres de Kaprekar

1. Choisir un nombre à 4 chiffres.
2. Écrire le plus grand nombre possible avec ces chiffres, ainsi que le plus petit possible (aide : dans quel ordre faut-il écrire les chiffres pour obtenir le plus grand ?), puis calculer la différence entre ces deux nombres.
3. Recommencer à partir de l'étape 2 avec le résultat obtenu.
4. Que remarques-tu ?
5. Que remarquez-vous ?

Classe tes réponses aux questions dans le tableau page suivante.

<p>C'est vrai, j'en suis sûr(e)!</p> <p>Je pourrai le prouver si on me le demande</p>	
<p>Cela me semble vrai</p> <p>Je ne sais pas le prouver mais j'y crois</p>	
<p>Je ne me prononce pas</p> <p>Je me pose la question de savoir si c'est vrai ou pas</p>	

Pour l'enseignant

1 Objectifs

L'activité a un double objectif :

- (i) faire découvrir aux élèves des énoncés mathématiques de différents statuts : propriétés, conjectures ou simples questions ; c'est l'objet des questions 1. à 6. ;
- (ii) les faire réfléchir au statut des énoncés qui ont été découverts : c'est à cet effet qu'on leur demande, à la fin, de classer leurs réponses (c'est-à-dire les énoncés qui ont été mis au jour) dans le tableau de la page 2.

Les rubriques du tableau tentent de donner une idée intuitive de ce qu'on entend par *propriété* (case « C'est vrai, j'en suis sûr »), *conjecture* (case « Cela me semble vrai ») ou simple *question* (case « Je ne me prononce pas »), laquelle est précisée par une phrase plus explicite. Le vocabulaire lui-même n'est pas au programme du cycle 4 (ce qui bien sûr n'empêche pas de l'utiliser si on le souhaite), ce qui paraît important pour la suite des apprentissages mathématiques est de faire émerger chez les élèves la conscience que tous les énoncés (mathématiques, ou autre !) n'ont pas le même statut et de les entraîner, dans des cas simples, à déterminer le statut de tel ou tel énoncé.

2 Histoire

Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905 – 1986, de nationalité indienne), passionné par les nombres depuis l'enfance, suit une carrière d'instituteur tout en poursuivant des recherches personnelles pour assouvir sa passion. Vers 1949, travaillant sur l'écriture des nombres, il découvre la *constante de Kaprekar* : le nombre $6174 = 7641 - 1467$, vers lequel converge toute suite construite avec un nombre de quatre chiffres (non tous égaux) auquel on applique l'*algorithme de Kaprekar*.

Travaillant sur un autre algorithme, « ajouter à un nombre la somme de ses chiffres en écriture décimale », il découvre la notion de nombre généré et d'auto-nombre. Il s'intéresse aussi aux nombres de Demlo. Enfin, il a étudié les *nombres de Kaprekar* : nombres égaux à la somme des deux nombres obtenus en prenant le carré du nombre de départ et en le découpant en deux parties (9 est un nombre de Kaprekar car $9^2 = 81$ et $8 + 1 = 9$). Il contribue aussi à la découverte des nombres *harshad*, appelés aussi *nombres de Niven* : nombres divisibles par la somme de leurs chiffres.

Boudé par ses contemporains, ses travaux seraient passés inaperçus s'ils n'avaient pas été relayés par Martin Gardner, spécialiste de mathématiques récréatives, qui le fait connaître dans la revue *Scientific American* à partir de 1975.

L'essentiel des éléments de contexte ci-dessus proviennent de la page wikipédia consacrée à Kaprekar (voir Section 5). Notre activité porte sur l'algorithme et la constante de Kaprekar, malgré son intitulé choisi par souci de simplicité.

3 Réponses attendues

On note avec une simple flèche (. \rightarrow .) le passage d'un nombre au suivant dans le processus.

1. Prenons 4432.
2. On place les chiffres de 4432 (4, 4, 3 et 2) dans l'ordre décroissant pour avoir le plus grand nombre qui s'écrit avec 4 chiffres : c'est 4432, et dans l'ordre croissant pour avoir le plus petit : c'est 2344. On calcule la différence :

$$4432 \rightarrow 4432 - 2344 = 2088$$

3. On continue le processus à partir de 2088 :

$$4432 \rightarrow 2088 \rightarrow 8820 - 0288 = 8532 \rightarrow 8532 - 2358 = 6174$$

et on constate que 6174 est fixe : $6174 \rightarrow 7641 - 1467 = 6174$.

On place l'énoncé « 6174 est un point fixe pour le processus » dans la case « C'est vrai, j'en suis sûr(e) » car on a immédiatement la preuve en faisant le calcul (il suffit de s'assurer que celui-ci est correct).

Prenons un deuxième exemple, 6287 :

$$6287 \rightarrow 8762 - 2678 = 6084 \rightarrow 8172 \rightarrow 7443 \rightarrow 3996 \rightarrow 6264 \rightarrow 4176 \rightarrow 6174$$

et un troisième, 5413 :

$$5413 \rightarrow 4086 \rightarrow 8172$$

qui termine donc comme 6287.

Aide pour les élèves : on pourra autoriser la calculatrice et les faire travailler en binôme en chargeant l'un des deux de contrôler la saisie de l'autre pour éviter les erreurs de calculs qui risquent d'empêcher de tomber sur 6174 ou de remarquer que ce nombre est fixe.

En se familiarisant avec le processus, on peut énoncer une autre propriété.

On vérifie immédiatement que deux entiers qui s'écrivent avec les mêmes chiffres dans un ordre différent ont la même suite d'images après une étape. On place cet énoncé dans la première case « C'est vrai, j'en suis sûr(e) ».

4. Je remarque que les trois nombres que j'ai choisis tombent tous sur 6174.

À ce stade, on peut poser la question : tombe-t-on toujours sur 6174 ?

5. En mettant tous les exemples en commun, de deux choses l'une :

- a) soit on remarque qu'ils tombent tous sur 6174. Comme il y en a un nombre important :

On conjecture que tous les nombres à 4 chiffres tombent sur 6174, c'est-à-dire on place cet énoncé dans la case « Cela me semble vrai ».

Cette conjecture, bien qu'assez raisonnable, va s'avérer fausse, voir le 2^e cas ;

b) soit on a essayé un multiple de 1111, par exemple 1111 lui-même :

$$1111 \rightarrow 1111 - 1111 = 0 \rightarrow 0000 - 0 = 0$$

et 0 est lui aussi un point fixe. On a cependant un nombre important d'exemples à 4 chiffres non tous égaux qui tombent tous, eux, sur 6174.

On peut tout de même conjecturer que tous les nombres à 4 chiffres non tous égaux tombent sur 6174, c'est-à-dire placer cet énoncé dans la case « Cela me semble vrai ».

4 Variantes

Les zéros. Il y a une certaine imprécision dans les consignes données au début, qui apparaît par exemple en appliquant le processus au nombre 1000, puisqu'on obtient alors un nombre à 3 chiffres :

$$1000 \rightarrow 1000 - 0001 = 999$$

Que fait-on? Si on applique la même règle que précédemment pour ce nombre à 3 chiffres, on obtient $999 - 999 = 0$, ce qui produit un nouveau cas particulier par rapport à ceux qu'on a trouvés ci-dessus; si au contraire on décide de rester dans le domaine des nombres à 4 chiffres, l'ensemble des entiers compris entre 1000 et 9999, on ajoute le chiffre 0 à gauche du résultat trouvé, dont l'image est alors :

$$0999 \rightarrow 9990 - 0999 = 8991 \rightarrow 8082 \rightarrow 8532 \rightarrow 6174$$

Avec ce choix, 1000 suit la règle générale.

D'après Wikipédia (voir Section 5), Kaprekar suivait une règle encore plus stricte, il éliminait tous les zéros au moment de prendre le plus grand et le plus petit nombre qu'on peut écrire avec les chiffres donnés, si bien que :

$$1000 \rightarrow 1 - 1 = 0$$

Il faut faire un choix, qui semble assez arbitraire; peut-être le fait de ne pas créer de nouvelles exceptions en conservant le même nombre de chiffres à chaque étape est-il à privilégier pour faire découvrir la conjecture et tenter ensuite de la prouver? C'est le choix qu'on conserve ici.

Nombres à 2 chiffres. On est partis d'un nombre à 4 chiffres comme dans la version initiale de Kaprekar. On peut tout aussi bien appliquer le processus aux nombres à 2 ou 3 chiffres. On voit un phénomène intéressant se produire à 2 chiffres :

$$37 \rightarrow 36 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 9 \rightarrow 90 - 09 = 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow \dots$$

Ici on ne tombe pas sur un point fixe dans le cas général (il n'y a que 0!), mais sur une boucle qui se répète à l'infini :

$$81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 9 \rightarrow 81 \tag{1}$$

On conjecture que tous les nombres à 2 chiffres distincts tombent sur la boucle (1). On place (temporairement) cet énoncé dans la 2^e case du tableau.

L'avantage est qu'on peut assez facilement prouver la conjecture, par exemple avec un peu de calcul littéral : tous les nombres à 2 chiffres s'écrivent sous la forme $10a + b$ avec $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$ donc

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$$

est, si $a > b$, un multiple > 0 de 9 à au plus 2 chiffres ; il suffit donc d'étudier les images des entiers de la "table de 9". Or ils sont tous, à l'ordre près de leurs chiffres, dans la boucle (1). On peut aussi utiliser le critère de divisibilité par 9 : deux nombres qui s'écrivent avec les mêmes chiffres ont la même somme des chiffres, à laquelle ils sont congrus modulo 9, donc leur différence est congrue à 0 modulo 9, c'est-à-dire divisible par 9.

On peut maintenant remonter l'énoncé ci-dessus en 1^{re} case du tableau.

Nombres à 3 chiffres. Pour les nombres à 3 chiffres, on retrouve un point fixe qui est 495, les exceptions à la règle (qui est de tomber sur le point fixe) sont les multiples de 111.

On conjecture que les entiers à 3 chiffres non tous égaux tombent sur 495.

On pourrait envisager une preuve par ordinateur menant un calcul exhaustif pour tous les entiers à 3 chiffres. Ou on généralise l'argument ci-dessus :

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$$

donc il suffit de vérifier la propriété pour les multiples de 99 à 3 chiffres : 099, 198, 297, 396, 495 et leurs "symétriques" 594, 693, 792, 891 et 990. On vérifie que :

$$990 \rightarrow 891 \rightarrow 792 \rightarrow 693 \rightarrow 594$$

On peut maintenant remonter l'énoncé ci-dessus en 1^{re} case du tableau.

5 Quelques références

- Sur wikipédia, Kaprekar : https://fr.wikipedia.org/wiki/Dattatreya_Ramachandra_Kaprekar et son algorithme : https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Kaprekar
- La biographie (en anglais) de Kaprekar sur Mac Tutor Index : <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar/>
- Une activité sur l'algorithme de Kaprekar sur le site de l'académie de Créteil : <https://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/kaprekar.pdf>
- La page de Gérard Villemin intitulée « Algorithme, itération, procédé, opération ou cycle de Kaprekar » : <http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvm/Iteration/Kaprekar.htm> ; lui aussi désigne 6174 comme un *nombre de Kaprekar*.