

Modèles mathématiques pour le tas de sable : déterministes et aléatoires

Noureddine Igbida

Résumé

On s'intéressera à la modélisation de l'évolution de la surface d'un tas de sable au cours du temps en présence d'un apport de sable. Ces modèles sont macroscopiques et utilisent principalement l'angle de stabilité qui caractérise le matériau granulaire. On étudiera le modèle de Prigozhin (MP), l'automate cellulaire du tas de sable (ACTS) et un modèle non local (MN). Le modèle MP est une EDP non linéaire obtenue à partir de l'équation de continuité et une loi phénoménologique. Cette équation apparaît aussi dans de nombreuses applications (comme le transport optimal de masse, Problème de Monge-Kantorovich, optimisation de masse ..) est aussi appelée equation de Monge-Kantorovich. L'ACTS permet de décrire la formation d'un tas de cubes et fait apparaître une équation stochastique (vu que la chute des cubes pour se stabiliser est supposée aléatoire). Le lien entre les deux modèles réside dans le fait que, lorsque la taille des cubes tend vers 0, les solutions de l'ACTS convergent vers la solution de MP. Le passage à la limite se fait en utilisant notre MN. ceci permet en particulier de donner une approximation des deux modèles à une échelle intermédiaire. Le plan est le suivant :

I - ACTS (appelé aussi Modèle stochastique ou Modèle discret du tas de sable)

I-1 : Principes

I-2 : Modélisation : processus de Markov, équation stochastique

II - Modèle de Prigozhin (appelé aussi équation d'évolution de Monge-Kantorovich)

II-1 : Modélisation

II-2 : Existence et unicité de solution

II-3 : Exemple de solutions

II-4 : Analyse numérique

III - Modèle non local

II-1 : Modélisation

II-2 : Existence et unicité de solution

II-3 : Exemple de solutions

II-4 : Analyse numérique

III - Lien entre les trois modèles