

Modèles mathématiques pour le tas de sable : déterministes et aléatoires

N. Igbida

Institut de Recherche XLIM UMR-CNRS 6172
Université de Limoges, 87000 Limoges

Errachidia, 3ème EPEDPNL'2010
Avril 2011

Introduction

Tas de sable : terme générique pour désigner les matériaux granulaires

- Chaque fois qu'on entasse plusieurs objets, et que les interactions entre ces objets sont semblables à celles qui existent entre des blocs durs, on a affaire à un matériau granulaire.
- un matériau granulaire est une collection de grain macroscopique solide de taille suffisamment large que le mouvement Brownien¹ est inexistant.
- **Questions.** Les exemples de problèmes que nous tentons de comprendre sont purement qualitatifs :
 - Comment se forme un tas de sable en fonction d'une source de distribution de sable ?
 - Modéliser les avalanches ?
 - Comment se stabilisent les tas de sable instable ?
 - Comment se déplace un tas de sable sous l'effet d'un transport du au vent ou à l'eau ?
- Même si on ne dispose pas de modèle mathématique universel "acceptable", différentes approches existent et sont exploitées pour étudier ce type de questions :
 - Physiques
 - Modélisation numérique : éléments discrets (mécanique).
 - Algèbre combinatoire : automate cellulaires.
 - Stochastique : automates cellulaires et système de particules.
 - Différentielle : EDO et EDP.

Notre intérêt de recherche dans cette thématique se situe dans l'approche différentielle et stochastique.

1. animées d'un mouvement irrégulier et incessant

- La modélisation numérique (approche adoptée par les mécaniciens) consiste à considérer le matériau granulaire comme un ensemble discret constitué d'un nombre fini de grains susceptibles d'interagir entre eux. Cette approche (microscopique) donne lieu à des modèles discrets faisant intervenir plusieurs équations décrivant le contact et le frottement entre les grains. Suivant les questions qu'on se pose, le nombre considérable de grains mis en jeu peut compliquer le calcul et l'analyse.
- L'approche différentielle, adoptée généralement par les physiciens et mathématiciens, modélise les matériaux granulaires par des mouvements de fluides.
 - Néanmoins, ils ne coulent pas comme les liquides, ils glissent en avalanches irrégulières.
 - En supposant que le glissement est confiné dans une couche mince, on peut décrire leur dynamiques à l'aide de lois fondamentales de la mécanique des fluides ou des équations phénoménologiques.
 - Cette approche donne lieu à des EDP paraboliques non linéaires dégénérées (modèle de Prigozhin²) :

$$\begin{cases} \partial_t h - \nabla \cdot (m \nabla u) = f \\ m \geq 0, |\nabla h| \leq \gamma, (|\nabla h| - \gamma) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où $h(t, x)$ désigne la hauteur du tas au point x du plan et au temps $t > 0$, et $f = f(t, x)$ repréente la source de distribution de matériau.

- L'approche différentielle avec des équations phénoménologiques donne lieu à un système de réaction-diffusion dont le couplage fait intervenir un terme eikonal (modèle BCRE³) (Voir le cours de Stefano Finzi Vita).

2. L. Prigozhin, Sandpiles and river networks : Extended systems with non-local interactions. Phys. Rev. E, 1994, vol. 49, pp. 1161-1167.

3. Bouchaud, Cates, Ravi Prakash et Edwards, A model for the dynamics of sandpile surfaces, J. Phys. I France, 4 (1994), 1383-1410

Généralités

- Les matériaux granulaires se présentent souvent sous la forme de reliefs ou de creux plus ou moins prononcés (c'est si familier que nous avons souvent tendance à l'ignorer).
- C'est principalement à travers ce phénomène que les matériaux granulaires se manifestent dans la nature et dans la vie de tous les jours.
- Le tas de sable qui se forme lorsque le sable est versé à partir d'un point fixe est conique.
- Dans les régions montagneuses, on observe souvent des talus formés par des fragments de roches accumulés au bord des routes.
- Dans les déserts, les grains transportés par le vent, s'empilent derrière les obstacles et forment des pentes.
- Sur les bordures des plages, on observe souvent des rides assez régulièrement espacées.



Cette aptitude des matériaux granulaires à se mettre en pente ou en talus est appelée effet de talus.

- L'effet de talus oppose les matériaux granulaires aux fluides : lorsque l'on incline un verre d'eau, la surface libre reste horizontale. Si on fait la même expérience avec du sable, le résultat est très différent :

la surface libre du sable commence par tourner avec le verre. Ainsi, elle fait un angle avec l'horizontale.

- Si on continue à tourner le verre, l'angle augmente jusqu'à une certaine valeur où une avalanche de grains se déclenche à la surface et dévale la pente. Après l'avalanche, on obtient un angle légèrement plus faible que celui qui correspond au déclenchement de l'avalanche :

cette observation indique qu'il existe un angle limite, appelé angle de repos, qui ne peut pas être franchi.

- C'est ce que nous observons aussi en versant des grains sur une surface par un entonnoir. Les grains qui tombent sous l'effet de la pesanteur forment un tas conique. Les grains qui arrivent sur le sommet se déversent par saccades sur les flans du tas. Le tas grandit tout en gardant le même angle limite :

l'angle de repos reste ainsi le même quelle que soit la taille du talus.

- L'angle de repos varie avec le type de grains :
 - Pour un tas de billes de verre, l'angle de repos est de l'ordre de 22° .
 - Pour le sable sec, il est autour de 30° .
 - Pour un talus d'enrochements, l'angle de repos peut s'élever à 45° .
- Il y a plusieurs façons d'atteindre l'angle de repos :
 - en versant des grains sur une surface par un entonnoir
 - en laissant les grains se déverser à partir d'un réservoir
 - en inclinant progressivement un lit de grains initialement à surface horizontale
 - en poussant les grains avec un bulldozer
- Quel que soit le procédé, on se retrouve toujours à la fin avec un angle de repos qui a pratiquement la même valeur et qui ne dépend que du matériau utilisé.
- Ces observations suggèrent que

l'angle de repos est une propriété intrinsèque d'un matériau granulaire.

En d'autres termes, même si les grains sont disposés d'une manière désordonnée, ils s'arrangent toujours pour qu'une pente formée de ces grains ne puisse dépasser l'angle de repos.

Analogie avec le frottement

- Il revient à Coulomb d'être le premier à comprendre que cet angle est lié au frottement solide entre grains.
- Nous avons vu que si on incline lentement le sable contenu dans un récipient, il tourne comme un bloc solide tant que l'angle d'inclinaison est inférieur à l'angle de repos.
- C'est également ce qui se passe si on pose un bloc solide sur un plan. Lorsque l'on incline le plan, le bloc ne bouge pas. Mais il arrive un moment où le bloc se met à glisser. L'angle d'inclinaison pour lequel le bloc commence à glisser est appelé angle de frottement entre le bloc et le plan.
- Tout comme l'angle de repos, l'angle de frottement dépend du type de matériaux dont sont constitués le bloc et le support. Par exemple, si le bloc et le support sont en bois, l'angle de frottement est d'environ 26° .
- En vertu de cette analogie, on peut dire que l'angle de repos n'est rien d'autre que l'angle de frottement pour un matériau granulaire. En effet, divisons par la pensée le talus granulaire en plusieurs couches parallèles. Chaque couche est susceptible de glisser sur la couche sous-jacente à la manière d'un bloc solide sur un plan incliné. L'angle de repos est l'angle d'inclinaison de la surface libre pour lequel une couche se met à glisser par rapport à ses couches voisines. L'angle de repos est ainsi équivalent à l'angle de frottement entre les couches de grains.

- Ségrégation :

- un autre problème dans la détermination d'un angle de talus pour une poudre réelle est que celle-ci bien généralement présente une granulométrie :

elle est un mélange de particules plus ou moins grosses.

- En formant un tas conique, les particules les plus grosses ont tendance à rouler jusqu'au bas de la pente alors que les plus fines sont piégés entre les interstices des autres particules formant le plan incliné.
- Il en résulte une ségrégation suivant la taille des particules :

l'angle de talus est alors différent entre le bas et le haut du tas.

- Dilatance :

- Un autre problème lié à la détermination de l'angle de talus est que la surface d'un milieu granulaire même sans cohésion peut-être stable au delà de l'angle critique ?
- Cette propriété est étroitement liée à la notion de dilatance, introduite par Reynolds :
ce dernier a montré qu'un milieu granulaire doit généralement se dilater pour se déformer.
- On comprends donc que l'on peut incliner un tas de sable sec (matériau sans cohésion) d'un angle supplémentaire ? de quelques degrés sans rompre l'édifice tant que les grains ne peuvent s'échapper des cages que constituent leur voisines.

Un comportement collectif

- Dans un milieu granulaire au repos, les grains s'imbriquent et s'équilibrent par contacts multiples. Il est difficile de déplacer un grain sans perturber les autres. C'est pourquoi le repos et l'écoulement des milieux granulaires sont des phénomènes collectifs qui impliquent les interactions d'un ensemble de grains.
- Par exemple, il est très difficile d'empiler des billes sur une surface plane pour construire un tas puisque les grains roulent les uns sur les autres et sur la surface, finissant ainsi par s'éparpiller. Mais, si on pose délicatement une poignée de billes sur la surface, ou si l'on verse les grains à partir d'un entonnoir que l'on relève progressivement pour laisser passer les grains par petits paquets denses, un tas se forme même si quelques billes s'éloignent en roulant.
- Cette observation suggère que l'imbrication des grains contribue à bloquer leurs rotations. De même, les forces de frottement entre grains les empêchent de glisser les uns sur les autres. Sans roulement et glissement des grains, le tas peut donc rester au repos sans s'étaler sur la surface.
- L'effet de talus est donc une propriété d'un ensemble de grains et non une propriété spécifique à chaque grain. Néanmoins, la valeur de l'angle de repos dépend dans une certaine mesure du coefficient de frottement entre grains puisque c'est la force de frottement qui empêche les grains de glisser les uns par rapport aux autres. Par exemple, si on lubrifie, même très légèrement, les surfaces des billes de verre afin de réduire le coefficient de frottement entre grains, l'angle de repos diminue sensiblement.

- Ségrégation
- Dilatance
- Phénomènes collectifs
- Le sable se comporte comme un fluide non-newtonien
- Loi de Bagnold (1954)
 - La viscosité d'un matériau granulaire n'est pas constante
 - Elle croît avec la vitesse de cisaillement
-

Plan du cours

- Modèle continue d'évolution de surface pour le tas de sable
 - Modélisation
 - Questions d'existence et d'unicité de solution
 - Calcul numérique et simulation
 - Extensions et perspectives (dunes, lacs et rivières, ...)

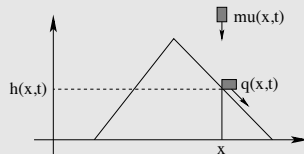
- Modèle stochastique pour le tas de sable (automate cellulaire)
 - Modélisation
 - Lien avec le modèle continue
 - Extensions et perspectives

- Modèle non locale pour des structures discrètes
 - Modélisation
 - Questions d'existence et d'unicité de solution
 - Lien avec le modèle continue et le modèle stochastique
 - Calcul numérique et simulation
 - Perspectives

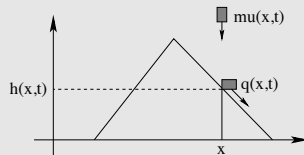
Partie I

Modèle continue d'évolution de surface pour le tas de sable

- Modélisation
- Questions d'existence et d'unicité de solution
- Calcul numérique et simulation
- Perspectives



- The flow is confined in a thin boundary layer moving down the slopes
- The density of the material is constant
- Surface flow is directed by the steepest descent
- Angle of stability α : the steepest angle that the surface made with the ground
- No pouring over the parts of the pile surface inclined less than α



- Conservation of mass

$$h_t + \nabla \cdot q = \mu$$

- Phenomenological equations

$$\exists m = m(t, x) \geq 0 : q = -m \nabla h$$

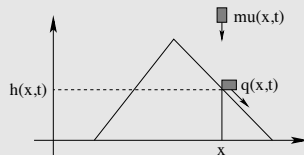
- Gradient constraint

$$|\nabla h| \leq \gamma := \tan(\alpha)$$

- No pouring for surface inclined less than

$$m (|\nabla h| - \gamma) = 0$$

Modèle d'évolution de surface ([Prighozin, 1996], [Aronson and Al.,1999])



$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) - \nabla \cdot (m \nabla h(t, x)) = \mu & \text{in } Q \\ m = m(t, x) \geq 0, |\nabla h(t, x)| \leq 1 & \text{in } Q \\ m(1 - |\nabla h(t, x)|) = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{on } \Sigma. \end{array} \right.$$

Existence, unicité et comportement asymptotique

Consider the stationary problem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (m(x)\nabla z(x)) = g & \text{in } \Omega \\ m \geq 0, |\nabla z| \leq 1, m(1 - |\nabla z|) = 0 & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Theorem (Evans, De Pascale, Pratelli ...)

Let $g \in L^2(\Omega)$ be such that $\int_{\Omega} g = 0$ and set $K = \{z \in H_0^1(\Omega) ; |\nabla z| \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega\}$. The following assertions are equivalent

- $z \in K$, there exists $m \in L^2(\Omega)$, such that $m \geq 0$, $m(|\nabla z| - 1) = 0$ a.e. in Ω and $-\nabla \cdot (m\nabla z) = g$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.
- $g \in \partial \mathbf{I}_K z$; i.e.

$$\int_{\Omega} zg \geq \int_{\Omega} \xi g \quad \text{for any } \xi \in K.$$

Problème stationnaire

Consider the stationary problem

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (m(x)\nabla z(x)) = g & \text{in } \Omega \\ m \geq 0, |\nabla z| \leq 1, m(1 - |\nabla z|) = 0 & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Proof :

- (\Rightarrow) Obvious
- (\Leftarrow) We consider the p -Laplacian equation

$$\begin{cases} -\Delta_p z_p = g & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Let $p \rightarrow \infty$

- $u_p \rightarrow u$, $u \in K$ and $\int_{\Omega} zg \geq \int_{\Omega} \xi g$, for any $\xi \in K$.
- $|\nabla u|^{p-2} \rightarrow m$ in $L^q(\Omega)$ (very hard!!!).

The preceding theorem implies that

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) - \nabla \cdot (m(t, x) \nabla h(t, x)) = f \\ m \geq 0, |\nabla h| \leq 1, m(1 - |\nabla h|) = 0 \\ u = 0 \\ u(0) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t) + \partial \mathbf{I}_K u(t) \ni f(t) \\ u(0) = 0. \end{array} \right. \quad \text{in } H = L^2(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(t) \in K, \text{ for any } t > 0 \\ \int_{\Omega} \xi(f(t) - u_t(t)) \leq \int_{\Omega} u(t)(f(t) - u_t(t)) \\ \text{for any } t > 0 \text{ and } \xi \in K. \end{array} \right.$$

Rappel : Semi-groupe non linéaire dans un espace de Hilbert

Voir tableau ...

Existence de solution

Theorem (nonlinear semigroup theory in Hilbert space)

For any $f \in BV(0, T; L^2(\Omega))$, (PM) has a unique solution in the sense that :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega)), \quad u(0) = 0, \\ u(t) \in K \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} (u(t) - z) (f(t) - u_t(t)) \geq 0 \\ \text{for any } z \in K \text{ and a.e. } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Moreover, we have

Theorem

For any $f \in BV(0, T; L^2(\Omega))$, denoting u_p the solution of the p -Laplacian evolution equation (large p)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \mu \quad \text{in } Q \\ u = 0 \quad \text{on } \Sigma \\ u(0) = u_0, \end{array} \right.$$

as $p \rightarrow \infty$,

$$u_p \rightarrow u \quad \text{in } \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega)),$$

and u is the solution of (PM).

Stationary equation :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (m(x)\nabla z(x)) = g & \text{in } \Omega \\ m \geq 0, |\nabla z| \leq 1, m(1 - |\nabla z|) = 0 & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- For general g , m is not regular : m is a measure and $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$
- Theory of tangential gradient with respect to Radon measure (cf. Bouchitté, Buttazzo, De Pascale, Seppecher ...) :

$$(MK) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (m \nabla_m z) = g & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ |\nabla_m z| = 1 & m - \text{ a.e. in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{Monge-Kantorovich equation})$$

- **Bibliography** : Existence, uniqueness of $m \nabla_m u$, regularity, related transport for Monge problem... : Ambrosio, Bouchitté, Buttazzo, De Pascale, Evans, Seppecher

Evolution equation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (m \nabla_m u) = \mu, & |\nabla u| \leq 1 & \text{in } Q \\ |\nabla_m u(t)| = 1 & & m - \text{ a.e. in } \Omega \\ u = 0 & & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

- Theory of tangential derivative for time dependent functions : $t \in \square(0, T) \Rightarrow \nabla_{\underline{v}} u(t) ??$

Remarques : formulations équivalentes

Remark

Assume that $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ and $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are regular and $|\nabla u| \leq 1$ in Ω . Then

$$\begin{array}{l} \updownarrow \\ \bullet \quad m(|\nabla u| - 1) = 0 \quad \text{and} \quad \Phi = m \nabla u \quad \text{in} \quad \Omega \\ \bullet \quad m = |\Phi| = \Phi \cdot \nabla u \quad \text{in} \quad \Omega \\ \bullet \quad m = |\Phi| \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} |\Phi| \leq \int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla u \end{array}$$

Theorem (Ig, 2009)

Let μ be a Radon measure and $u \in K$. Then,

$$\int_{\Omega} u \, d\mu = \max_{\xi \in K} \int_{\Omega} \xi \, d\mu \Leftrightarrow \exists \Phi \in \mathcal{M}_b(\Omega)^N \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\Phi) = \mu & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ |\Phi|(\Omega) \leq \int_{\Omega} u \, d\mu \end{cases} \quad \text{(weak solution)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\nabla \cdot (\Phi) = \mu & \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \Phi = |\Phi| \nabla_{|\Phi|} u \end{cases} \quad \Leftrightarrow \int_{\Omega} u \, d\mu = |\Phi|(\Omega) = \min\{|\nu|(\Omega) ; -\nabla \cdot \nu = \mu\}.$$

Remark

- If (u, Φ) is a weak solution and $\Phi \in L^1(\Omega)^N$, then $\Phi = |\Phi| \nabla u$ a.e. in Ω .
- The expression $|\Phi|(\Omega) = \int_{\Omega} u \, d\mu = \langle \nabla \cdot \Phi, u \rangle$ is a weak formulation of " $|\Phi| = \Phi \cdot \nabla u$ ".

Theorem

Let $\mu \in BV(0, \infty; L^2(\Omega))$, $u_0 \in K$ and (u, Φ) a weak solution of (PM). If there exists $\mu_\infty \in L^2(\Omega)$ such that $\mu - \mu_\infty \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$, then there exists $u_\infty \in K$, such that, as $t \rightarrow \infty$,

$$u(t) \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

and

$$\int_{\Omega} u_\infty \mu_\infty \geq \int_{\Omega} \xi \mu_\infty \quad \text{for any } \xi \in K.$$

Corollary

If $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ and u is the solution of (PM), then as $t \rightarrow \infty$,

$$u(t) \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

and

$$\int_{\Omega} u_\infty \mu \geq \int_{\Omega} \xi \mu \quad \text{for any } \xi \in K.$$

Moreover, if $\mu \geq 0$, then

$$u_\infty = d(\cdot, \partial\Omega), \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

Let $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ and u the weak solution of (PM).

- If μ is nonnegative then, there exists $T < \infty$, such that

$$u(t) = d(\cdot, \partial\Omega) \text{ quad for any } t \geq T.$$

- For general μ , we do not know if this remains true, or if there exists $\tilde{\mu} \in BV(0, T; w^*-\mathcal{M}_b(\Omega))$, such that the solution of

$$\begin{cases} u_t + \partial \mathbf{I}_K u \ni \tilde{\mu} & \text{in } (0, T) \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

satisfies

$$u(t) = u_\infty \quad \text{for any } t \geq T$$

and u is a solution of the stationary equation corresponding to μ .

Partie II

Modèle continue d'évolution de surface pour le tas de sable

- ⇒ Calcul numérique et simulation
- ⇒ Perspectives

Calcul numérique

- *On a Dual Formulation for the Growing Sandpile Problem.* S. Dumont and N. Igbida, European Journal of Applied Mathematics, vol. 20, (2008) pp. 169-185

Assume that $\mu = f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

$$(PM) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial \mathbf{I}_K u(t) \ni f(t) & \text{for } t \in (0, T) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Time discretization : Euler implicit schema

- $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ whith $t_i - t_{i-1} = \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ such that

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

- We consider the approximation of $u(t)$ by :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_0 & \text{if } t \in]0, t_1] \\ u_i & \text{if } t \in]t_{i-1}, t_i] \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

where u_i is given by :

$$\begin{cases} u_i + \varepsilon \partial \mathbf{I}_K u_i \ni \varepsilon f_i + u_{i-1} & \text{for } i = 1, 2, \dots, n \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

- u_ε is the ε -approximate solution of (P_μ)

$$(PM) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial \mathbf{I}_K u(t) \ni f(t) & \text{for } t \in (0, T) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Nonlinear semigroup theory



Theorem

Assume $f \in BV(0, T; L^2(\Omega))$. Then,

① For any $\varepsilon > 0$ and any ε -discretisation, there exists a unique ε -approximation u_ε of (P_μ) .

② There exists a unique $u \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega))$ such that $u(0) = 0$, and

$$\|u - u_\varepsilon\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))} \leq C(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

③ The function u is the unique solution of (P_μ) .

Approximation numérique : problème générique

The generic problem is

$$v + \partial I_K v \ni g \quad \Leftrightarrow \quad v = P_K g$$

where

- $K = \{z \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) ; |\nabla z| \leq 1\}$.
- P_K the projection onto the convex K , with respect to the $L^2(\Omega)$ norm :

$$v = P_K(g) \Leftrightarrow v \in K, \quad \int_{\Omega} (v - g)(v - z) \geq 0 \quad \text{for any } z \in K.$$

Question :

For a given $g \in L^2$, how to compute $v = P_K g$?

Optimization problem :

$$J(v) = \frac{1}{2} \min_{z \in K} \|z - g\|_{L^2(\Omega)}^2 = \min_{z \in L^2(\Omega)} J(z),$$

$$\text{with } J(z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z - g|^2 + \int_{\Omega} \mathbb{1}_K(z).$$

Standard duality argument (Ekeland-Temam) : if

$$\mathcal{P} := \min \left\{ F(z) + H(\Lambda z) ; z \in V \right\},$$

where

$$\begin{array}{ll} \Lambda : V \longrightarrow Y & F : V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z \longrightarrow \Lambda z := \nabla z & z \longrightarrow F(z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z - g|^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} H : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \sigma \longrightarrow H(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

then

$$\mathcal{D} := \max_{p \in Y'} - \left(F^*(\Lambda^* p) + H^*(-p) \right) \leq \mathcal{P}.$$

Theorem

Assume that $\mathcal{P} < \infty$. If, there exists $z_0 \in V$ such that $F(z_0) < \infty$, $H(\Lambda z_0) < \infty$ and H is continuous at Λz_0 , then

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}.$$

and

$$\Lambda^* p \in \partial F(u) \quad \text{et} \quad -p \in \partial H(\Lambda u).$$

We have

- $\Lambda^* \sigma := \nabla \cdot \sigma$
- $F^*(z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z - g|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} g^2$
- $H^*(\sigma) = \int_{\Omega} |\sigma|$

$$G(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div}(w))^2 + \int_{\Omega} g \operatorname{div}(w) + \int_{\Omega} |w|$$

and

$$\mathcal{D} = \max \left\{ -G(\sigma) ; \sigma \in Y^* \right\}.$$

We expects that

$$-G(\Phi) = \max \left\{ -G(\sigma) ; \sigma \in Y^* \right\} = \min \left\{ F(z) + H(\Lambda z) ; z \in V \right\} = F(u).$$

and

$$-\nabla \cdot \Phi = g - u \quad \text{and} \quad \Phi \in \partial \mathbf{I}_{B(0,1)}(\nabla u).$$

- The natural space for the study of \mathcal{P} by duality argument is the set of vector valued Radon measures such that the divergence is L^2 (this kind of argument was used in ([BaPr,08]).
- Here give a simple analysis by using the space $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$;

$$H_{\operatorname{div}}(\Omega) = \left\{ w \in \left(L^2(\Omega) \right)^N ; \operatorname{div}(w) \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Approximation numérique : formulation duale dans $H_{div}(\Omega)$

- $J(z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z - g|^2 + \int_{\Omega} \mathbb{1}_K(z).$
- $H_{div}(\Omega) = \{\sigma \in (L^2(\Omega))^N ; \operatorname{div}(\sigma) \in L^2(\Omega)\}$
- $G(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\sigma))^2 + \int_{\Omega} g \operatorname{div}(\sigma) + d \int_{\Omega} |\sigma|.$

Theorem (Dumont-Ig, 2007)

Let $g \in L^2(\Omega)$ and $v = P_K(g)$. Then, there exists a sequence $(w_{\epsilon})_{\epsilon > 0}$ in $H_{div}(\Omega)$, such that, as $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \min_{z \in L^2(\Omega)} J(z) &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left(-G(w_{\epsilon}) \right) \\ &= \sup_{w \in H_{div}(\Omega)} \left(-G(w) \right) \end{aligned}$$

and

$$\operatorname{div}(w_{\epsilon}) \rightarrow v - g \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

- $\sup_{\sigma \in H_{div}(\Omega)} (-G(\sigma)) \leq \min_{z \in K} J(z)$.
- We consider the following elliptic equation

$$(S_\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_\varepsilon - \nabla \cdot w_\varepsilon = g \\ w_\varepsilon = \phi_\varepsilon(\nabla v_\varepsilon) \\ u = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{in } \Omega \\ \\ \text{on } \partial\Omega. \end{array}$$

where, for any $\varepsilon > 0$, $\phi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ is given by

$$\phi_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon} (|r| - 1)^+ \frac{r}{|r|}, \quad \text{for any } r \in \mathbb{R}^N.$$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

For any $g \in L^2(\Omega)$, (S_ε) has a unique solution v_ε , in the sense that $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $w_\varepsilon := \phi_\varepsilon(\nabla v_\varepsilon) \in L^2(\Omega)^N$ and $v_\varepsilon - \nabla \cdot w_\varepsilon = g$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$\Downarrow \quad \text{letting } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \Downarrow$

Theorem

Lemma

For any $g \in L^2(\Omega)$, $w \in H_{div}(\Omega)$ and $z \in K$, we have

$$-G(w) \leq J(z).$$

Proof : Let $w \in H_{div}(\Omega)$ and $z \in K$ be fixed. We have

$$\begin{aligned} -G(w) - J(z) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div}(w))^2 - \int_{\Omega} g \operatorname{div}(w) - \int_{\Omega} |w|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z - g|^2 \\ &\leq -\int_{\Omega} |w|^2 - \int_{\Omega} z \operatorname{div}(w) \\ &\leq -\int_{\Omega} |w|^2 + \int_{\Omega} \nabla z \cdot w \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

Consider the following elliptic equation

$$(S_\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_\varepsilon - \nabla \cdot w_\varepsilon = g \\ w_\varepsilon = \phi_\varepsilon(\nabla v_\varepsilon) \\ u = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{in } \Omega \\ \\ \text{on } \partial\Omega. \end{array}$$

where, for any $\varepsilon > 0$, $\phi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ is given by

$$\phi_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon} (|r| - 1)^+ \frac{r}{|r|}, \quad \text{for any } r \in \mathbb{R}^N.$$

The nonlinearity ϕ_ε satisfies

- i) for any $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^N$, $(\phi_\varepsilon(r_1) - \phi_\varepsilon(r_2)) \cdot (r_1 - r_2) \geq 0$
- ii) there exists $\varepsilon_0 > 0$ and $A > 1$ such that $\phi_\varepsilon(r) \cdot r \geq |r|^2$ for any $r \geq A$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$.
- iii) for any $\varepsilon > 0$ and $r \in \mathbb{R}$, $|\phi_\varepsilon(r)| \leq \phi_\varepsilon(r) \cdot r$

Lemma

We have

- ① $(v_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ is bounded in $H_0^1(\Omega)$.
- ② For any Borel set $B \subseteq \Omega$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B |\nabla v_\varepsilon| \leq |B|.$$

Proof : Taking v_ε as a test function in (S_ε) , we get

$$\int_\Omega v_\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega (|\nabla v_\varepsilon| - 1)^+ |\nabla v_\varepsilon| = \int_\Omega f v_\varepsilon. \quad (2)$$

So,

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega (|\nabla v_\varepsilon| - 1)^+ |\nabla v_\varepsilon| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Using property *ii)* of ϕ_ε , for any $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, we have

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 &= \int_{[|\nabla v_\varepsilon| \leq A]} |\nabla v_\varepsilon|^2 + \int_{[|\nabla v_\varepsilon| > A]} |\nabla v_\varepsilon|^2 \\ &\leq \int_{[|\nabla v_\varepsilon| \leq A]} |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int (|\nabla v_\varepsilon| - 1)^+ |\nabla v_\varepsilon| \\ &\leq |A|^2 |\Omega| + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Thus v_ε is bounded in $H_0^1(\Omega)$.

Now, let us prove that, for any Borel set $B \subseteq \Omega$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B |\nabla v_\varepsilon| \leq |B|.$$

For any $B \subseteq \Omega$ a fixed Borel set, we have

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla v_\varepsilon| &\leq \int_B (|\nabla v_\varepsilon| - 1)^+ + |B| \\ &\leq \int_B (|\nabla v_\varepsilon| - 1)^+ |\nabla v_\varepsilon| + |B| \\ &\leq \varepsilon \int_\Omega (f - v_\varepsilon) v_\varepsilon + |B|. \end{aligned}$$

Letting $\varepsilon \rightarrow 0$, and using the fact that v_ε is bounded in $L^2(\Omega)$, the second part of the lemma follows.

Proof of the theorem :

Step 1 : $v_\varepsilon \rightarrow \tilde{v}$ and $\tilde{v} \in K$. As a consequence of the preceding Lemma, there exists $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ and a subsequence that we denote again by ε , such that

$$v_\varepsilon \rightarrow \tilde{v} \quad \text{in } H_0^1(\Omega) \text{ - weak and in } L^2(\Omega),$$

which implies that

$$\operatorname{div}(w_\varepsilon) \rightarrow \tilde{v} - g \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

To prove that $\tilde{v} \in K$, let us consider $A_\delta = [|\nabla \tilde{v}| \geq 1 + \delta]$, with arbitrary $\delta > 0$. Since, as $\varepsilon \rightarrow 0$, $\nabla v_\varepsilon \rightarrow \nabla \tilde{v}$ in $L^1(\Omega)^D$ -weak, then

$$\begin{aligned} |A_\delta| &\leq \frac{1}{1 + \delta} \int_{A_\delta} |\nabla \tilde{v}| \\ &\leq \frac{1}{1 + \delta} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\delta} |\nabla v_\varepsilon|, \end{aligned}$$

so that, by using the second part of the preceding Lemma, we deduce that

$$|A_\delta| \leq \frac{1}{1 + \delta} |A_\delta|,$$

which implies that $|A_\delta| = 0$. Since $\delta > 0$ is arbitrary, then, we deduce that $|\nabla \tilde{v}| \leq 1$ a.e. in Ω .

Step 2 : $\tilde{v} = P_K(g)$. For any $z \in K$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g - \tilde{v}) (\tilde{v} - z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (g - v_{\varepsilon}) (\tilde{v} - z) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(\nabla v_{\varepsilon}) \cdot \nabla(\tilde{v} - z) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\phi_{\varepsilon}(\nabla v_{\varepsilon}) - \phi_{\varepsilon}(\nabla z)) \cdot \nabla(\tilde{v} - z) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Step 2 : $\int_{\Omega} |w_{\varepsilon}| \rightarrow \int_{\Omega} (g - v) v.$

We see, first, that by using property *iii*) of ϕ_{ε} , we have

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |w_{\varepsilon}| &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon}(\nabla v_{\varepsilon}) \cdot \nabla v_{\varepsilon} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (g - v_{\varepsilon}) v_{\varepsilon} \\ &\leq \int_{\Omega} (g - v) v. \end{aligned}$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v (g - v) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v (g - v_{\varepsilon}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_{\varepsilon} \cdot \nabla v \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |w_{\varepsilon}|. \end{aligned}$$

Step 3 : Since

$$-G(w_{\varepsilon}) \leq \min_{z \in K} J(z),$$

we deduce that, as $\varepsilon \rightarrow 0$, $G(w_{\varepsilon}) \rightarrow -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |v - g|^2 = -\min_{z \in K} J(z)$. This completes the proof of the theorem.

Approximation numérique : approximation de $\inf_{\sigma \in H_{div}(\Omega)} G(\sigma)$

- Ω is a bounded, open, polyhedral subset of \mathbb{R}^N (N equal to 1 or 2).
- T_h a regular partitioning (triangulation or quadrangulation) of $\bar{\Omega}$ by n disjoint open simplices τ of diameter no greater than a given real h , with $\bar{\Omega} = \cup_{\tau \in T_h} \bar{\tau}$.
- $V_h \subset V := H_{div}(\Omega)$ the space of lowest-order Raviart-Thomas finite elements :

$$V_h = \left\{ q_h \in (L^2(\Omega))^D : q_{\tau}^h = a_{\tau} + b_{\tau}x, a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}, \forall \tau \in T_h, \right. \\ \left. \text{and } q_h \cdot \nu \text{ is continuous across simplex boundaries} \right\}.$$

V_h is a finite dimensional subspace of V with a dimension equal to $N = N(h)$.

Let w_h be the solution of

$$(\mathcal{D}_h) \quad G(w_h) = \inf \left\{ G(q_h); q_h \in V_h \right\}.$$

Theorem

Let $g \in L^2(\Omega)$, $v = P_k g$ and w_h a solution of (\mathcal{D}_h) . Then, as $h \rightarrow 0$,

$$\operatorname{div}(w_h) \rightarrow v - g \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

and

$$-G(w_h) \rightarrow \min_{z \in L^2(\Omega)} J(z) = \frac{1}{2} \|v - g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Avalanche d'un tas de sable instable

Related works and works in progress :

- Moving sand dunes : Barchanes ...
- Sandpile problem on non flat regions (on obstacles) : lacs and rivers
- Collapsing sandpile problem.
- Hysterisis : angle of stability is different than the angle of avalanches.
- Application to optimal mass transportation : how to use numerical results concerning sandpile to treat Monge problem ?
Example : $d(\cdot, \partial\Omega)$

(S. Dumont)

(S. Dumont)

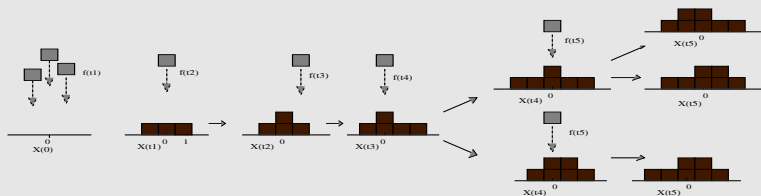
Partie III

Modèle stochastique pour le tas de sable (automate cellulaire)

- Modélisation
- Lien avec le modèle continue
- Extensions et perspectives

Modèle stochastique : système de particules [EvReza-98]

The evolution of a stack of unit cubes resting on the plane when new cubes are being added to the pile :



- The cube is assigned on a position connected to several downhill "staircases" along which it can move, and the cube will randomly select among the available downhill paths
- The assigned cube has no "staircases" derived from the position it was put on and remains in place
- A cube moves following adjacent positions in order to get a stable configuration, which means that the heights of any two adjacent columns of cubes can differ by at most one
- In the case of two dimension, a cube moves by falling in one of the four directions (forward, back, left or right)

A staircase is a chain of adjacent positions with a height difference equal to one cube.

Consider a set of sites labeled by a couple of integers $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$

- The source term is a deterministic function $\hat{f} : (0, T) \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ assigning cubes
- At each time a stable configuration is reached instantaneously; that is a mapping $\eta(t) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ such that

$$|\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \quad \text{if} \quad i \sim j,$$

where $i \sim j$ denotes $|i - j| \leq 1$ and $|i| = |i_1| + |i_2|$, for any $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$.



$$i \sim j \iff |i - j| \leq 1$$



3D



2D

Remark : If we enable the cubes to move in the eight directions by adding the displacements on the diagonal, then we need to equip \mathbb{Z}^2 with the norm

$$|(i_1, i_2)| = \max(|i_1|, |i_2|)$$

- Dynamique aléatoire d'un ensemble de particule (cubes)
- Espace : $O = \mathbb{Z}^2$ (ou bien $O = \mathbb{Z}$ pour la dimension 1).
- Etats admissible : S
- $S \subset H$ espace Euclidien
- Discretiser le temps $t_0 < t_1 < \dots$ (aléatoire).
- Décrire le système avec une suite de variables aléatoires $X_i \in S$ indépendante définie sur O
- Considérer $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson process (d'intensité λ), puis définir le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ par $X(t) = X_{N(t)}$ for $t \geq 0$ (processus de Poisson composé)
- Si X_1, X_2, \dots est une chaîne de Markov ; i.e.

$$P[X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = P[X_{n+1} = x \mid X_n = x_n].$$

alors $(X(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Markov.

- Limite hydrodynamique (les cubes sont de plus en plus petits et de plus en plus nombreux)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \eta([Ns], [Nx]).$$

Exemple : système de particule pour l'équation de transport

- On suppose qu'il existe une suite d'instants $(t_i)_{i=0,1,2,\dots}$, telle que à chaque instant t_i , $i = 1, 2, \dots$ tout les cubes bougent d'une case (en espérance) vers l'avant.
- On suppose que les t_i forment une suite de variables aléatoires indépendentes identiques et exponentiellement distribué de moyenne $1/c$ (temps suivant la loi de Poisson de paramètre c qui represente le nombre d'événements esperés par unité de temps).
- Soit η_0 une configuration initiale et $(\eta_i)_{i=1,2,\dots}$ la solution du processus stochastique "définie" par l'experience aléatoire.
- Notons par

$T_p(\eta_p) = \eta_p(\cdot - p)$ translation de tout les cubes de p cases vers l'avant.

- Partant d'une configuration donnée η_p , on a

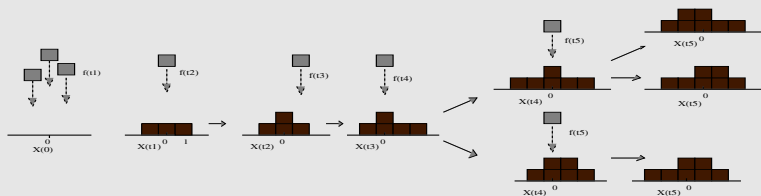
$$\begin{aligned} E(\eta_{p+1}) &= T_1(\eta_p) = \eta_p(\cdot - 1) \\ &= T_p(\eta_0) \end{aligned}$$

Theorem

Soit $(\eta(t))_{t \geq 0}$ le processus stochastique définie comme précédement. Lorsque $N \rightarrow \infty$, on a

$$E \left[\frac{1}{N} \eta([Nt], [Nx]) \right] \rightarrow \eta_0(x - ct) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

système de particule pour le tas de sable (Evans-Rezkhanlou)



Principes :

- Source f est déterministe.
- Temps d'arrivée des cubes aléatoire.
- L'arrivage se fait cube par cube et le mouvement des cubes est aléatoire.
- Une colonne de cube est instable si l'écart avec une des colonnes voisines dépasse 1.
- Un cube est instable s'il se trouve au sommet d'une colonne instable.
- Si un cube (ou plusieurs) qu'on dépose se trouve dans une position instable, alors il existe au moins un chemin (un escalier) le long duquel le cube peut descendre jusqu'à trouver une position stable.
- On ne compte pas le temps où le cube est en mouvement. On suppose qu'il atteint sa position stable instantanément.

Modélisation de l'ACTS

- $O = \mathbb{Z}^2$ (ou bien $O = \mathbb{Z}$ pour la dimension 2).
- $S = \left\{ \xi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{N} ; |\xi(i) - \xi(j)| \leq 1 \text{ pour tout } i \sim j \right\}$.
- $H = l^2(\mathbb{Z}^2)$.
- Pour tout $\xi \in S$, on note par $p(i, j, \xi)$ la probabilité qu'a un cube qu'on dépose sur la colonne i pour finir sa chute sur la colonne j .

Comme pour tout $t > 0$, un cube déposé sur la colonne i se stabilisera sûrement quelque part sur une colonne j , alors pour tout $\xi \in S$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} p(i, j, \xi) = 1 \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}^2.$$

A partir d'un état donnée ξ , les états possible après ajout d'un cube avec la fonction $\hat{f}(t)$ sont de la forme

$$\xi_{+\Delta t} \rightarrow \xi + \delta_j \quad \text{avec une probabilité } p(i, j, \xi) \quad \text{où } j \in \mathbb{Z}^2.$$

Donc

$$E[\xi_{+\Delta t} \mid \xi] = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}^2} (\xi + \delta_j) p(i, j, \xi) f(i), \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}^2.$$

Remark

La probabilité p est inconnue.

- Assume that $\hat{f}(t, i) = f\left(\frac{t}{N}, \frac{i}{N}\right)$, with $f \in BV(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$
- Let $(\eta(t), t \geq 0)$ the Markov processus associated with the source \hat{f} (i.e. η satisfying the stochastic equation)

Theorem ([Ev-Reza,98][lg,08])

As $N \rightarrow \infty$, we have

$$E \left[\int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x) - \frac{1}{N} \eta(Nt, [Nx])|^2 \right] \rightarrow 0,$$

where u is the solution of the evolution equation

$$(PM) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial \mathbf{I}_K u(t) \ni f(t) \\ u(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^2} \left(f(t) - \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right) (u(t) - z) \geq 0 \\ \text{for any } z \in K. \end{cases}$$

and

$$K = \left\{ z \in H_0^1(\Omega) ; |\nabla z| \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega \right\}.$$

Limite fluide : problème déterministe intermédiaire

- Consider the Hilbert space

$$H := l^2(\mathbb{Z}^2) = \left\{ \eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; \|\eta\| := \sum_i \eta(i)^2 < \infty \right\}.$$

- The set of stable configuration is

$$\hat{K} := \left\{ \eta \in H ; |\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \text{ if } i \sim j \right\}.$$

- In $l^2(\mathbb{Z}^2)$:

$$(Pd) \quad \begin{cases} \partial_t \hat{u} + \partial \mathbf{I}_{\hat{K}}(\hat{u}) \ni \hat{f} & \text{for } t \geq 0 \\ \hat{u}(0) = 0, \end{cases}$$

where $\partial \mathbf{I}_{\hat{K}}$ denotes the sub-differential of $\mathbf{I}_{\hat{K}}$ in $l^2(\mathbb{Z}^2)$.

- For a given $\hat{f} \in L^2(0, T; l^2(\mathbb{Z}^2))$, (Pd) has a unique solution

$$\left(\begin{array}{l} \hat{u} \in W_{loc}^{1,\infty}(0, \infty; H) \text{ and } \hat{u}(\cdot, t) \in \hat{K} \text{ for each time } t > 0, \\ \sum_i \left(\hat{f}(i, t) - \partial_t \hat{u}(i, t) \right) \left(\hat{u}(i, t) - \hat{\xi}(i) \right) \geq 0 \end{array} \right)$$

for a.e. $t \geq 0$ and each $\hat{\xi} \in \hat{K}$.

- Consider the Hilbert space

$$H := l^2(\mathbb{Z}^2) = \left\{ \eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; \|\eta\| := \sum_i \eta(i)^2 < \infty \right\}.$$

- The set of stable configuration is

$$\hat{K} := \left\{ \eta \in H ; |\eta(i) - \eta(j)| \leq 1 \text{ if } i \sim j \right\}.$$

- In $l^2(\mathbb{Z}^2)$:

$$(Pd) \quad \begin{cases} \partial_t \hat{u} + \partial \mathbf{I}_{\hat{K}}(\hat{u}) \ni \hat{f} & \text{for } t \geq 0 \\ \hat{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Theorem (Evans-Rezakhanlou,99) – (Ig,2008)

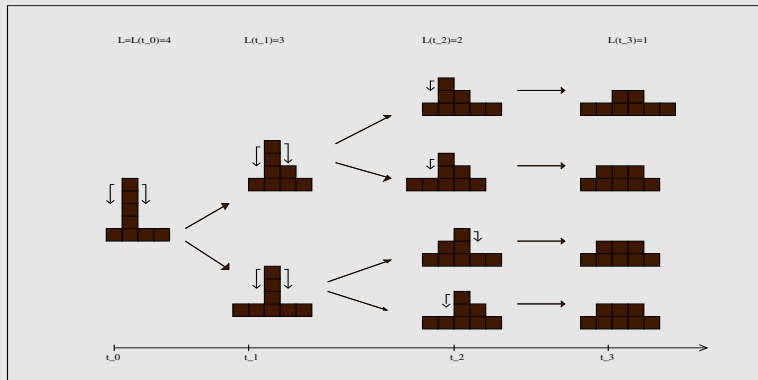
Assume that $\hat{f} \in BV(0, T; l^2(\mathbb{Z}^2))$. Let us consider \hat{u} be the solution of (Pd) and $(\eta(t), t \geq 0)$ the stochastic process generated by \hat{f} . Then, we have

$$E \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} (\eta(i, t) - \hat{u}(i, t))^2 \right] \leq \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(j, s) ds, \quad \text{for any } t \geq 0. \quad (3)$$

(F. Karami et NI)

AC pour l'avalanche d'une pile de sable (NI)

Exemple en 2D :



Travail en cours (NI) : Etude de la limite fluide.

(V. Martin)

Merci pour votre attention

Bonne route pour Merzouga