

- Exemples
- Discrétisation des opérateurs de Leray-Lions (e.g.  $-\Delta u = f$ )
  - Eq. hyperboliques scalaires multi-d non linéaires avec cond. aux limites (avec le formalisme de bord de Felix Otto)
  - Eq. de Stokes compressible

Leray-Lions Dimension  $d$  ( $d=2$  ou  $3$ ),  $\Omega$  ouvert; on fera du  $2d$  pour polygonal pouvoir dessiner.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(x, \nabla u) = f & \text{ds } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Exemple fondamental  $a(x, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ ,  $p > 1$ .

- $a$  Carathéodory (continue en  $\nabla u$ , mesurable en  $x$ )
- $a(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p$  •  $|a(x, \xi)| \leq b(x) + c |\xi|^{p-1}$ ,  $b \in L^{p'}$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$
- $\rightarrow$  alors  $-\operatorname{div} a(x, \nabla \cdot)$  agit de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  dans son dual  $W^{-1,p'}(\Omega)$
- $(a(x, \xi) - a(x, \eta))(\xi - \eta) > 0$  si  $\xi \neq \eta$ .

Résultat classique (Vishik; Leray-Lions)

On prendra  $f \in L^{p'}(\Omega)$  (en vue de schémas numériques) si on  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$  est OK.

$\exists!$  solution au sens:  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

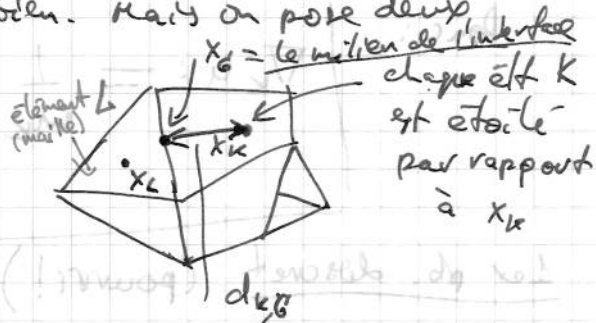
$$\int a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx = \int f v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La méthode de preuve de convergence donne aussi l'existence!

NB La discrétisation joue très souvent le rôle de régularisation!

Rq La discr. par éléments finis marche très bien. Mais on pose deux contraintes:

- maillages très généraux
- une inconnue par maille ( $u_K$ , dans la maille  $K$ )



NB En 3D,  $x_G$  est le barycentre: on veut  $x_G = \int_{\Omega} x$ .

Notation  $d_{K,G} = d(x_K, x_G)$  hypo  $\eta \leq \frac{d_{K,G}}{d_{L,G}} \leq \frac{1}{\eta}$ ,  $\eta$  constante universelle. (on l'utilise pour certaines preuves de convergence)

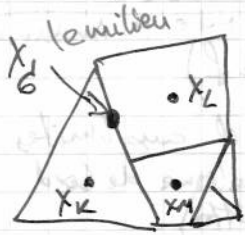
Espace d'approx.  $H_T = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u|_K = u_K \in \mathbb{R}\}$  l'espace des fcts const/maille.

1ère idée: construire une approx. de  $\nabla u$ .

On se sert des  $u_K$ , mais aussi des  $u_G$

Notation  $\mathcal{T}$  désigne le maillage;  $u_{\mathcal{T}}$  sera sol. discrète,  $\nabla_{\mathcal{T}}$  sera l'opérateur de gradient discret, etc etc.

## 2) Théorème Brouwer



On prend  $x_d = \sum_{M \in \dots} \alpha_{M,d} x_M$  (avec, souvent, juste trois termes !)

on définit  $u_d$  par

$$u_d = \sum \alpha_{M,d} u_M \quad (\text{ce n'est pas une inconnue!})$$

(en général,  $x_d$  est le barycentre de l'interface  $\delta$ )

C'est une interpolation des inconnues!



Ex. (formule magique!)

$\Pi_\delta(\cdot)$  is the operator of interpolation which takes the values  $(u_k)_{k \in H}$  and gives the value  $u_d$  associated with the point  $x_d$ .

$$\sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_\delta \underbrace{n_{k,d}}_{\substack{\text{vect.} \\ \text{colonne}}} \underbrace{(x_d - x_k)}_{\substack{\text{vect.} \\ \text{ligne}}} = m_k \text{Id.}$$

l'ensemble des interfaces autour de la maille

Matrice

vraie si  $x_d$  est le barycentre de  $\delta$ .

### Utilisation

$$\sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_\delta n_{k,d} (x_d - x_k)^t \xi = m_k \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

• Si  $u$  est une fonction affine:

$$\sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_\delta n_{k,d} \underbrace{(x_d - x_k) \cdot \nabla u}_{u(x_d) - u(x_k)} = m_k \nabla u.$$

Ceci donne

- le gradient exact d'une fct. affine
- un gradient approché, pour une fct. régulière (par ex. la fonction test  $\varphi$ )

Donc:

$$\nabla_k u := \frac{1}{m_k} \sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_\delta n_{k,d} (u_d - u_k) \quad u \in H$$

$\uparrow u_d = \Pi_\delta(u)$

• enfin, ça donne un opérateur de gradient discret.

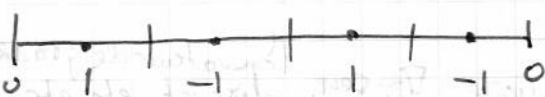
### 1er pb. discret (pouvri!)

$$(P_1) \begin{cases} u \in H \\ \int_{\Omega} a(\nabla_k u) \cdot \nabla_k v \, dx = \int_{\Omega} f v \end{cases}$$

mais: l'opérateur discret  $u$  est pas coercif

NB Pour les interfaces extérieures, on pose  $u_d = 0$ .

Exemple:  $d=1$ , maillage uniforme,  $x_k = \text{centres de mailles}$ ,  $u_k = \pm 1$  alternativement



$\Rightarrow$  il est naturel de choisir  $u_d = \frac{(+f) - (-f)}{2} = 0$  en interpolant les valeurs.

3) Thierry Gallouët dans la formule du gradient discret  $= u_k \sum_{\delta \in \mathcal{E}(k)} m_{k,\delta} = u_k \cdot 0$  avec la formule de Green-Gours

En substituant, comme  $\sum_{\delta \in \mathcal{E}(k)} m_{k,\delta} u_k = 0$ , et tous les  $\delta_\delta$  sont nuls, on a  $\nabla_k u = 0, \forall k$ . (et  $\int a(\nabla_k u) \cdot \nabla_k u = 0$  malgré que  $u \neq 0$ )

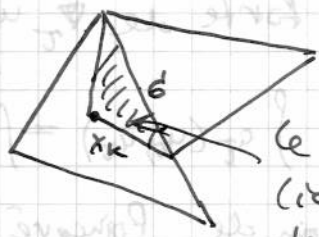
Idee de Robert Eymard : on rend le pb. coercif en rajoutant un terme

$\forall k \in \mathcal{T}, \delta \in \mathcal{E}_k$ , on definit  $R_{k,\delta}(u) = \frac{1}{d_{k,\delta}} (u_\delta - u_k - (\nabla_k u)(x_\delta - x_k))$   
 $\forall u \in H$   
 (qui est une sorte de terme de consistance!)

NB pour u affine,  $R_{k,\delta}(u) = 0$ , si  $u_\delta = u(x_\delta), u_k = u(x_k)$ .

zone pb. discret (coercif!)

$u \in H$   
 $(P_2) \left\{ \int_{\Omega} a(\nabla_k u) \cdot \nabla_k v \, dx + \int_{\Omega} |R_{\mathcal{T}}(u)|^{p-2} R_{\mathcal{T}}(u) R_{\mathcal{T}}(v) \right. \\ \left. a(u,v) := a(\nabla_k u) \cdot \nabla_k v + |R_{\mathcal{T}}(u)|^{p-2} R_{\mathcal{T}}(u) R_{\mathcal{T}}(v) \right. = \int_{\Omega} f v$



Le domaine  $D_{k,\delta}$  (ici, le fait que  $k$  est étoilé p/rapp. des pt  $-x_k$  est important)

$R_{k,\delta}(u)$  est constante par demi-diamant  $D_{k,\delta}$

$R_{\mathcal{T}}(u) = \sum_{k,\delta \in \mathcal{E}_k} R_{k,\delta}(u) \mathbb{1}_{D_{k,\delta}}$

(NB : autre maniere de faire :

remplacer  $\nabla_k u, \nabla_k v$  par  $\nabla_k u + R_{k,\delta}(u), \nabla_k v + R_{k,\delta}(v)$ ;

pour  $p=2$  c'est la même chose, pour  $p \neq 2$ , ce sont deux façons un peu différentes)

La coercivité se démontre ainsi : si  $a_{\mathcal{T}}(u,u) \geq 0$ , alors

$\nabla_{\mathcal{T}} u = 0$  ; alors dans  $R_{k,\delta}$ , seul le terme avec  $u_k - u_\delta$  survit  $\Rightarrow$  on a  $(u_k - u_\delta)^2 = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ .

Exercice technique

on peut mg  $a_{\mathcal{T}}(u,v) \geq \alpha \|u\|_{p,\mathcal{T},\Omega}$  avec  $\alpha$  constante absolue

(dépend gd même de la régularité du maillage:  $\eta$ , etc.)

(ou  $\|u\|_{p,\mathcal{T},\Omega} = \sum_{k \in \mathcal{T}} \sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_{k,\delta} \frac{|u_k - u_\delta|^p}{d_{k,\delta}^p}$ )

NB  $\triangle$  si  $v$  est régulière,  $R_{\mathcal{T}} v \rightarrow 0$  lorsque le pas  $h$  du maillage tend vers zéro!

[4] Thierry Gallouët

on a existence et unicite de  $u_\tau$  solution de  $(P_2)$ .

Maintenant, preuve de convergence:

- ① x estimations sur  $u_\tau$  (type  $L^p$ )
- ② x compacte (faible  $L^p$ )  $u_\tau \rightarrow u$   $L^p$  faible (forte, si l'on travaille un peu)
- ③ x  $u \in W_0^{1,p}$ , et aussi  $\nabla_\tau u \rightarrow \nabla u$   $L^p$  faible (que faible)
- ④ x (pour  $p \neq 2$ ) passer à la limite dans l'équation, en copiant la méthode de Minty
- ⑤ x convergence forte de  $\nabla_\tau u_\tau$  (et de  $u_\tau$ )

① Estimations.  $\int a_\tau(u_\tau, u_\tau) = \int f u_\tau \Rightarrow \alpha \|u\|_{p, \tau, \pi}^p \leq \|f\|_p \|u_\tau\|_p$

Puis on a besoin de Poincaré discret.

On se simplifie le travail : grâce à l'hypothèse sur  $\frac{d_{k,d}}{d_{k,d}}$ , on remplace

$|u_k - u_0|$  et  $|u_0 - u_L|$  par  $|u_k - u_L|$  tous les deux:

$$\|u\|_{p, \tau, \pi} \geq C_p \sum_k \sum_{d \in E_k} m_d d_{k,d} \frac{|D_d u|^p}{d_{k,d}^p} \quad \text{où } D_d u = \begin{cases} u_k - u_L, & d = k/L \\ u_k, & d \in E_k, d \subset \partial \Omega \end{cases}$$

Alors ~~il faut~~ on a

$$\|u\|_{p, \tau}$$

$$\alpha \|u\|_{p, \tau}^p \leq C_p \|f\|_p \|u_\tau\|_p, \text{ et on fait Poincaré.}$$

Pour faire Poincaré, il y a deux méthodes

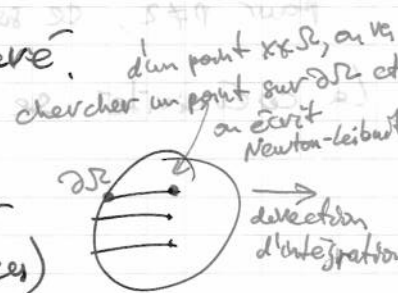
- écrire les intégrales de  $u$ , de  $\nabla u$  et faire Hölder (ça peut s'adapter, mais avec restriction de maillages)

- (écrit dans le livre, sous le nom de "Sobolev discret")

méthode indirecte: passer par Sobolev (pour  $p < d$ , par exemple)

$$\text{On a } \|u\|_{p^*} \leq C_p \|u\|_{W_0^{1,p}}, \quad p^* = \frac{dp}{d-p}$$

⚠ Il faut copier la méthode de preuve de Sobolev, plus exactement, la méthode de Mirenberg.



5) Thierry Gallouët

Une version: d'abord,  $p=1$ . Nirenberg démontre que  $\|u\|_{L^1} \leq C \|u\|_{BV}$ ,

Il suffit que  $u \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap BV(\mathbb{R}^d)$   
(preuve par approx. à partir de  $\mathcal{C}^\infty$ ).

$\|u\|_{L^1} \leq C \|u\|_{BV}$   
 $\forall u \in W^{1,1}$   
 $I^* = \frac{d-1}{d-2}$  l'exposant critique d'injection de  $W^{1,1}$

donc,  $\|u\|_{L^1} \leq C \|u\|_{BV}$ ,  $u \in L^1 \cap BV$

or, pour  $u \in H^1_\tau$ ,  $\|u\|_{BV} = \sum_\sigma m_\sigma |D_\sigma u|$  exactement!!!

Alors, le Nirenberg continue donne  $\|u\|_{L^1} \leq \sum_\sigma m_\sigma |D_\sigma u|$ ,

or,  $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1, \tau}$  pour  $u \in H^1_\tau$

puis  $p > 1$   $u \in H^1$ , on applique le cas  $p=1$  à  $v := |u|^d$  avec  $d = \frac{p^*}{p}$ .

Alors  $\|u\|_{p^*} \leq C \|u\|_{p, \tau}$  (ça marche pour  $p < d$ ).

Pour le cas  $p \geq d$ : c'est plus facile, on se ramène au cas  $p < d$ ;  
car  $\|u\|_{p, \tau} \geq \|u\|_{d-\varepsilon, \tau}$ , et on choisit  $\varepsilon$  suff. petit  
pour avoir  $\|u\|_q \leq C \|u\|_{p, \tau}$ ,  $\forall q < \infty$ .

Dans tous les cas, on en déduit  $\|u\|_p \leq C \|u\|_{p, \tau}$

En fin du compte:  $\|u_\tau\|_{p, \tau}^p \leq C \|u\|_p^p$ ,  $\|u_\tau\|_p \leq C \|u\|_p$ ,  $\|u_\tau\|_{p, \tau} \leq C \|u\|_{p, \tau}$

$\Rightarrow \|u_\tau\|_{p, \tau} \leq C$  et  $\|u_\tau\|_p \leq C$  (ici, on peut avoir aussi  $p < q < p^*$ ?)  
 $\Rightarrow \|\nabla_\tau u_\tau\|_p \leq C$ , car

$$\int a(\nabla_\tau u_\tau) \nabla_\tau u_\tau + |R_\tau u_\tau|^{p-2} R_\tau u_\tau = |f u_\tau| \leq C$$

- ② pour une suite de maillages,  
 $u_\tau \rightarrow u$   $L^p$  faible (de  $\mathbb{R}^d$ )  
 $\nabla_\tau u_\tau \rightarrow g$   $L^p$  faible (de  $\mathbb{R}^d$ )  
en prolongeant tout par zéro.

- ③ on montre d'un coup que  
 $u \in W^{1,p}_0$  et  $g = \nabla u$ ,  
en prenant la formulation faible.

⑥ Thierry Gallouët Soit  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

On prend  $P_\varepsilon(\varphi) = \varphi(x_k)$ , on en bricole la fct.  $\varphi_\varepsilon = \sum_k \varphi_k \mathbb{1}_k$ .

opérateur de projection sur l'espace discret  $H_\varepsilon$

Alors  $\int \nabla_\varepsilon u_\varepsilon P_\varepsilon \varphi dx = - \int u_\varepsilon \operatorname{div}_\varepsilon (P_\varepsilon \varphi)$  (+ un reste qui  $\rightarrow 0$ )

conv. faible vers  $g$       cv. fort vers  $\varphi$       cv. faible      convergera fort vers  $\operatorname{div} \varphi$

Somme par parties (c'est l'équivalent discret de l'intégration par parties)

A la limite:  $\int g \varphi dx = - \int u \operatorname{div} \varphi \Rightarrow \operatorname{div} u = g$ , donc  $u \in L^p$

$\Rightarrow u \in W_0^{1,p}$

④ on a  $\nabla_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$   $L^p$  faible  
 $u_\varepsilon \rightarrow u$   $L^p$  faible

toutes les convergences seront pour une sous-suite extraite

$a(u_\varepsilon) \rightarrow h$   $L^{p'}$  faible (à partir de l'hypothèse de croissance)

On veut montrer trois choses: (car  $a(u_\varepsilon)$  sera bornée dans  $L^{p'}$  dès que  $\nabla_\varepsilon u_\varepsilon$  est bornée dans  $L^p$ )

- (a)  $u$  est (l'unique) sol. du pb. de départ; il suffit de voir  $-\operatorname{div} a(\nabla u) = f$ .
- (b)  $u_\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^p$
- (c)  $\nabla_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$  fortement dans  $L^p$

(b) est facile

Rq si  $u \in (BV \cap L^1)(\mathbb{R}^d)$ , alors  $\|u(\cdot \pm \xi) - u\|_1 \leq |\xi| \|u\|_{BV}$

voir Brezis "Analyse fonct." pour  $W^{1,p}$ , Evans, Gariepy pour BV

On l'applique à  $u_\varepsilon \Rightarrow \|u_\varepsilon(\cdot \pm \xi) - u_\varepsilon\|_1 \leq |\xi| \|u_\varepsilon\|_{1,\varepsilon}$  ( $\|u_\varepsilon\|_{1,\varepsilon} = \sum_{\delta \in \mathcal{E}_\varepsilon} m_\delta |D_\delta u|$ )

mais  $\|u_\varepsilon\|_{1,\varepsilon} = \sum_{\delta} m_\delta |D_\delta u| \leq \sum_k \sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_\delta |D_\delta u| \leq$

la diff. est dans les mailles compacts double

$\leq \left( \sum_k \sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_\delta d_{k,\delta} |D_\delta u|^p \right)^{1/p} \left( \sum_k \sum_{\delta \in \mathcal{E}_k} m_\delta d_{k,\delta} \right)^{1/p}$

$\Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{1,\varepsilon} \leq (d(u,\varepsilon))^{1/p'} \|u_\varepsilon\|_{p,\varepsilon}$

Ainsi, on a l'estimation des translations de  $u_\varepsilon \Rightarrow$

$\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$  est relativement fortement compacte dans  $L^1(\Omega)$

au sens,  $u_\varepsilon(x) = \sum_k u_k \mathbb{1}_k(x)$ , où  $\mathbb{1}_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases}$  est la fct. caractéristique de  $K$

7) Thierry Gallouët

Comme on sait de plus :  $\|u_c\|_{p^*} \leq C$  si  $p \leq d$

ou  $\|u_c\|_q \leq C_q$  si  $p \geq d$ ,

et pour  $q > p$ , par interpolation, on a  $\{u_c\}$  font. compacte dans  $L^q$ ,  
 $\forall 1 \leq q < p^*$  ou  $1 \leq q < \infty$  si  $p \geq d$ .

Rq En mélangeant du continu et du discret, on y arrive plus vite qu'en faisant du tout-discret! Exemple: on a <sup>aussi</sup> une estimation  $\{u_c\}$  translatées dans  $L^p$ , mais il faut des cond. sur les maillages (peut-être) et de toute façon, les inégalités sont plus lourdes. On gagne à passer par  $L^2$  puis interpoler!

Q4 Est-ce que ça marche encore pour le pb. parabolique?  $\Delta$  à voir  
Maintenant: (a) + (c) par le "Monty trick" (dit aussi "argument de Monty-Browder")

$$\text{on a } \int_{\Omega} a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) \cdot \nabla_{\tau} P_{\tau} \varphi + \int_{\Omega} |R_{\tau}(u_{\tau})|^{p-2} R_{\tau}(u_{\tau}) R_{\tau}(P_{\tau} \varphi) = \int_{\Omega} f P_{\tau} \varphi$$

où  $P_{\tau}$  est la projection, et  $\varphi$  est une fct. test,  $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$

le terme à droite et le 1er terme à gauche convergent  
 $\int h \cdot \nabla \varphi$

ici, on profite de la conv. de  $R_{\tau}(P_{\tau} \varphi)$  vers zéro! (et même, uniformément sur  $\Omega$ )

Comme on vérifie facilement que  $|R_{\tau}(u_{\tau})|$  est borné dans  $L^{p-1}$ , on obtient la limite zéro pour le second terme.

En fin, en utilisant la densité de  $C_c^{\infty}(\Omega)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , on arrive (avec les bornes d'intégrabilité sur  $f$  et  $h$ ) à  $\int h \cdot \nabla \varphi = \int f \varphi + \int h \cdot \nabla \varphi$

On regarde maintenant  $\int_{\Omega} a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) \cdot \nabla_{\tau} u_{\tau}$ ; ça vaut  $\int f u_{\tau}$  à force de l'équation; ici on profite de la conv. faible et on a  $\int f u$  à la limite donc  $\lim \int a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) \nabla_{\tau} u = \int f u$ , ce que vaut, à son tour,  $\int h \cdot \nabla u$ . (un argument de type "compacité faible")

Bref, on a passé à la limite dans le produit de convergences faible- faible, en se servant de l'ég. vérifiée par nos fonctions

⑧ Thierry Gallouët

Maintenant, on a le pt. de départ pour Minty:

$$\int [a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) - a(\nabla_{\tau} P_{\tau} \varphi)] [\nabla_{\tau} u_{\tau} - \nabla_{\tau} P_{\tau} \varphi] \geq 0 \text{ par monotonie,}$$

chaque terme passe à la limite (le ~~seul~~ <sup>seul</sup> terme <sup>(miraculeux)</sup> compliqué ayant été traité ci-dessus)

$$\Rightarrow \int (h - a(\nabla u)) \cdot (\nabla u - \nabla \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \Rightarrow \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

On choisit maintenant  $\varphi = u + t\psi$ ,  $\psi \in C_c^1$ .

$$\Rightarrow t \int (h - a(\nabla u + t \nabla \psi)) \cdot \nabla \psi \geq 0 \text{ avec } t > 0 \text{ et } t < 0 \text{ et avec la conv. dommée}$$

pour passer à la lim. dans, on trouve  $\int (h - a(\nabla u)) \cdot \nabla \psi = 0$ .

Donc  $h = a(\nabla u)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

$$\text{Enfin, on a } \int a(\nabla u) \cdot \nabla \psi = \int f \psi \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$\Rightarrow u$  est la seule solution du pib.  $\Rightarrow$  la convergence (qui était, jusque là, à sous-suite près) est, <sup>(en fait)</sup> pour toute la suite  $\{u_{\tau}\}_{\tau}$ .

En fin, il reste à mg  $\nabla_{\tau} u_{\tau} \rightarrow \nabla u$  dans  $L^p$  fort,

$$\text{on revient à } \int (a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) - a(\nabla u)) (\nabla_{\tau} u_{\tau} - \nabla u) \geq 0;$$

$$\text{à la limite, on a } \int a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) \cdot \nabla_{\tau} u_{\tau} \leq \int a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) \cdot \nabla_{\tau} u_{\tau} + \underbrace{\int (P_{\tau}(u_{\tau}) - P(u_{\tau})) P_{\tau}(u_{\tau})}_{\geq 0} = \int a(\nabla u) \cdot \nabla u$$

$$\geq \int a(\nabla u) \cdot \nabla u; \text{ alors à la } \limsup \int a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) \cdot \nabla_{\tau} u_{\tau} \leq \int f u = \int a(\nabla u) \cdot \nabla u$$

Donc  $\lim \int (a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) - a(\nabla u)) (\nabla_{\tau} u_{\tau} - \nabla u) \leq 0$ , donc elle est  $= 0$  (car elle est  $\geq 0$  du fait de la monotonie de  $a(\cdot)$ )

Mais, on démontre, cela montre que  $\int (P_{\tau}(u_{\tau}))^p \rightarrow 0$  !

On remarque que  $(a(\nabla_{\tau} u_{\tau}) - a(\nabla u)) (\nabla_{\tau} u_{\tau} - \nabla u) = g_{\tau} \rightarrow 0$  dans  $L^1$

et  $g_{\tau} \rightarrow 0$  p.p. (pour une sous-suite) (car  $g_{\tau} \geq 0$ , par monotonie)

stricte monotonie

$\Rightarrow \nabla_{\tau} u_{\tau} \rightarrow \nabla u$  p.p. ! (référence: l'article de Leray-Lions)



Rq Pour  $q(x, u, Du)$ ,  $q$  lipschitz en  $u$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  
 il y a unicité: Boccardo-Gallouët-MC(?),  
 liste aux CPAS  
~~voir pour le travail d'unicité sur domaine non borné~~

Loi de conservation 
$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(v f(u)) = 0 & \text{ds } \Omega \times ]0, +\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^\infty & \text{avec CB } "u(x, t) = \bar{u}(x, t)" \text{, } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(à interpréter!)

Pour simplifier,  $\operatorname{div} v = 0$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  (on sait qu'en hyperbolique, les CB ne sont pas imposés sur tout le bord  $\partial\Omega$ ; voir Bardos-LeRoux-Médédec '79)  
Rq  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  est important; sans cela, on ne sait pas faire même le pb. linéaire; il n'y a pas le th. d'unicité pour coeff. juste continu!

Pour contourner  $\operatorname{div}(v) = 0$  est juste pour simplifier les est. à priori (garder les bornes).

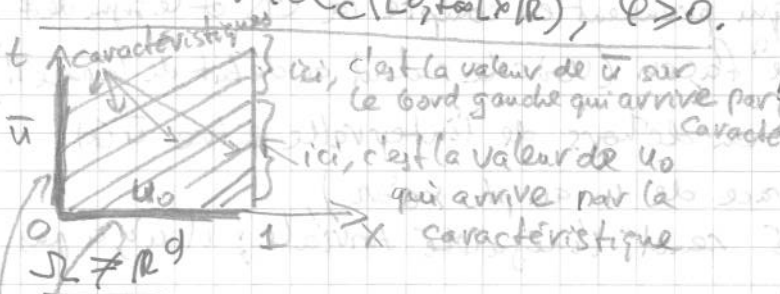
deux pbs - apparition de singularités; on ajoute une condition d'entropie.  
 - quel sens donner aux CB?

Regardons d'abord  $\Omega = \mathbb{R}^d$ .  
 car  $\operatorname{div} v = 0$  assure la conservation en  $t$  de la  $\|u(\cdot, t)\|_\infty$ .

Solution faible  $u \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+)$   

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t u \varphi_t + \iint f(u) v \cdot \nabla \varphi + \int u_0(x) \varphi(x, 0) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$$

Solution faible entropique  $\iint |u - \bar{u}| \varphi_t + \iint \operatorname{sign}(u - \bar{u}) (f(u) - f(\bar{u})) v \cdot \nabla \varphi + \int |u_0 - \bar{u}| \varphi(x, 0) \geq 0$   
 $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ ,  $\varphi \geq 0$ .



voir le Ser papier de Thierry Gallouët sur l'hyperbolique pour le contre-exemple à trace faible + cond. entropique à l'intérieur. ~~Y'a-t-il contradiction avec le résultat de Panov...~~

exemple:  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $f(u) = u$ ,  $v = 1 \Rightarrow u_t + u_x = 0 \Rightarrow$  on n'a pas de CB sur le bord droit. (voir le dessin ci-dessus)

plus généralement, si  $f' > 0$ ,  $u = \bar{u}$  sur  $\{x \in \partial\Omega, v \cdot u < 0\}$   
 si  $f' < 0$ ,  $u = \bar{u}$  sur  $\{x \in \partial\Omega, v \cdot u > 0\}$   
 ici on impose des conditions

Le pb. est lorsque  $f'(\cdot)$  peut changer de signe... faudrait-il  $f'(\bar{u}) < 0$  ou bien  $f'(\bar{u}) > 0$ ? la réponse est celle de Bardos-LeRoux-Médédec

10 Le formulation faible entropique deotto:

$$\text{sign}^+(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}; \text{sign}^-(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ -1, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\iint (u-k)^{\pm} \varphi_t + \iint \text{sign}^{\pm}(u-k) (f(u)-f(k)) v \cdot \nabla \varphi + \int (u_0-k)^{\pm} \varphi(x,0) + M \iint_{\partial \Omega} (u-k)^{\pm} \varphi(x,t) d\delta(x) \geq 0$$

parties positive et négative de  $(u-k)$   
(ona  $u-k = (u-k)^+ - (u-k)^-$ )

avec la formulation, on déduit le principe de maximum (prendre  $k=A$  et  $k=B$ )

On demande  $A \leq u_0 \leq B$ ,  $A \leq \bar{u} \leq B$  p.p. dans  $\Omega \times \mathbb{R}^+$   $\Rightarrow A \leq u \leq B$  p.p. dans  $\Omega \times \mathbb{R}^+$

$M$  est la const de Lipschitz de  $f$  sur  $[A, B]$ , fois  $\|\nabla u\|_{\infty}$ .

Ici, on a "partitionné en deux" les entropies  $|u-k|$  de Kruzhkov;

on prend  $(u-k)^+$  et  $(u-k)^-$ . Ceci contient plus d'information, car  $|u-k| = (u-k)^+ + (u-k)^-$ ; il suffit d'additionner les inégalités avec les semi-entropies de Kruzhkov pour obtenir celles de Kruzhkov.

Et pour le pb. avec bord, cela contient vraiment plus d'information

(contre-exemple de Julien Vassel pour l'unicité de solution entropique, si l'on remplace  $(u-k)^{\pm}$  dans la formulation ci-dessus par  $|u-k|$ ).

on a "majoré" le terme de flux au bord inconnu:

$$|\text{sign}^{\pm}(u-k) (f(\bar{u}) - f(k)) \cdot \nu| \leq \|\nabla u\|_{\infty} \cdot \text{const. de Lipschitz de } f \cdot (u-k)^{\pm}$$

Le miracle technique ici est:

- lorsque on choisit  $k$  entre  $\bar{u}$  et la valeur de trace de  $u$  au bord (en imaginant que cette trace existe... Otto s'en affranchit on a des restrictions qui prennent en compte la CB et le signe de  $f'$  exactement de la "bonne" façon (voir le calcul au début de la page 11)

- lorsque l'on choisit  $k$  en dehors de l'intervalle entre  $\bar{u}(x)$  et la valeur  $u(x)$  (la trace de  $u$  au pt.  $x \in \partial \Omega$ ), le fait d'avoir majoré rend l'inégalité triviale; il n'y a pas de restriction.

Cette formulation est miraculeusement bien adaptée à l'étude de convergence des schémas numériques!

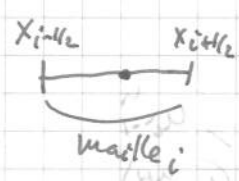
Pour illustrer l'application, on prend le cas  $f' > 0$ , avec  $u, \bar{u}$  régulières, on a  $v \cdot n < 0 \Rightarrow u = \bar{u}$  en ce point  $x$ .

On prend  $\bar{u}(x) < k < u(x)$  (là où  $\bar{u} > u$ ).  
 On trouve le terme de bord  $\int_{\partial\Omega} (f(u) - f(k)) v \cdot n \varphi \geq 0 \Rightarrow$  impossible!  
 dans la formul. avec  $\text{sign}^+$   
 Ici, on traite le terme de bord obtenu par l'application de la fle de Green-Gours dans la formulation entropique.

Donc  $\bar{u} \leq u$ .  
 En utilisant la formulation avec  $\text{sign}^-$ , on déduit de même,  $\bar{u} \geq u$ .  
 Et  $u = \bar{u}$  est non contradictoire, grâce au choix de  $M$ !

Def  $\forall u_0 \in C^0(\Omega), \forall \bar{u} \in L^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+), \exists !$  solution faible entropique.

De plus, cette définition est parfaitement adaptée à l'étude des schémas numériques.  
 le numérique cas 1D:  $\Omega = \mathbb{R}$ .



inconnue:  $u_i^n$  sur la grille  $\{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\}$  au temps  $t_n = nk$ ,  $k = \text{pas de temps}$ .

Il est intéressant de prendre le pas en espace variable (il ya une subtilité dans la preuve)

on discrétise  $\begin{cases} u_t + (f(u))_x \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), u_0 \in L^\infty \end{cases}$   
 On prend  $u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x) dx$   
 $h_i := x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, h_i = \max_{i \in \mathbb{Z}} h_i$  (taille du maillage)  
 on est obligé d'introduire l'outil des estimations "BV faibles"

on aimerait de garder le principe de maximum; pour cela, il suffit de "décentrer au bout".

$$h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n = 0, \quad i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

ou, si l'on fait de l'implicite; on va choisir l'explicite pour faire plus simple.

Il reste à prescrire les valeurs de  $f_{i+1/2}^n, f_{i-1/2}^n$  en fonction des inconnues  $(u_i^n)_i$ .  
 on se limite à  $f_{i+1/2}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$  (évent. avec une fct.  $g$ ) les fonctions de flux numérique

12) Thierry Gallonit

Les conditions sur  $g$ :

- $g(a,b) = f(a)$  ← la constance du flux numérique
- $g$  Lipschitz sur  $[A,B]^2$
- $g \uparrow$  par rapport à son 1er argument  
 $g \downarrow$  —  $u$  — à son 2nd argument

Sous ces conditions, on sait montrer la convergence; en dehors on ne sait (presque) pas la montrer. Dans la pratique, les schémas peuvent converger sans ces conditions.

Les cond. assurent le principe de maximum

• les ~~est~~ inégalités d'entropie

(via les estimations BV faibles)

La monotonicité est très importante à deux endroits (voir plus loin)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} (g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n))$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} \left( \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{g(u_i^n, u_i^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{u_i^n - u_{i-1}^n} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right)$$

$$= u_i^n \left( 1 + \frac{k}{h_i} C_i^n - \frac{k}{h_i} D_i^n \right) + \frac{k}{h_i} C_i^n u_{i+1}^n + \frac{k}{h_i} D_i^n u_{i-1}^n$$

$\geq 0$ , si  $k$  est assez petit

donc, on a une combinaison convexe de  $u_i^n, u_{i+1}^n, u_{i-1}^n$

→ les bornes sur  $(u_i^n)_i$  sont héritées par  $(u_i^{n+1})_i$ .

La cond. de Lipschitz sur  $g$  fait que les cond. imposées sont vérifiées dès que, par exemple,

$$\left| \frac{k}{h_i} C_i^n \right| \leq \frac{k}{h_i} L \leq \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{k}{h_i} D_i^n \right| \leq \frac{k}{h_i} L \leq \frac{1}{2}$$

cond. CFL  $k \leq \frac{1}{2L} \min_i h_i$   
Courant-Friedrichs-Lewy

Par récurrence en  $n$ , on a le principe de max. discret:  $A \leq u_i^n \leq B \forall i \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow A \leq u_i^n \leq B \forall i \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour la convergence: on se débrouille avec l'est.  $L^\infty$  uniquement.

--- fin du cours 1 ---

Exemples de flux numériques

1. décentrement ~~est~~ "amont"
  - $f$  croissante  $\Rightarrow g(a,b) = f(a)$
  - $f$  décroissante  $\Rightarrow g(a,b) = f(b)$
2. Godunov

que faire si  $f$  n'est pas monotone ( $f'$  change de signe)

$$g(a,b) = \min \{ f(s), s \in [a,b] \} \text{ si } a \leq b$$

$$\max \{ f(s), s \in [b,a] \} \text{ si } a \geq b$$

ça c'est une formulation équivalente à la forme traditionnelle "la sol. au pb. de Riemann en zéro" / mais pour un système il n'y a pas de formulation aussi simple

3. Rusanov

$$g(a,b) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + D \left( \frac{f(b)-f(a)}{2(a-b)} \right)$$

(le premier terme est celui du schéma centré)  
+ diffusion numérique

où  $D$  est choisi de sorte à annuler la monotonie

ce la revient à rajouter une diffusion en  $Dh u_{xx}$ ,  
h le pas de maillage (la discrétisation d'un tel terme se fait exactement via les différences de la forme  $\frac{a-b}{2}$  !)

Analyse du schéma

Soit  $u_\tau(x) = \sum u_i^n \mathbb{1}_{M_i \times ]t_n, t_{n+1}[}$ ,  $t_n = nk$ ,  $k$  le pas de temps,  
 $M_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$  la maille  $i$ .

Existence, unicité: trivial car schéma explicite.

on a déjà vu que  $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} [g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_{i-1}^n)]$

respecte le principe du maximum si  $k \leq \frac{1}{2L} \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i$ .

Donc,  $A \leq u_0 \leq B$  implique  $A \leq u_\tau \leq B \Rightarrow \|u_\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq \max\{A, -B\}$ .

on peut alors extraire une suite  $L^\infty$  faible convergente:

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} u_\tau \varphi \rightarrow \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} u \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

Il y a deux problèmes

• la conv.  $L^\infty$  - faible n'est pas adaptée au pb sans mesures!

on a aussi  $f(u_\tau) \rightarrow \mu_f$   $L^\infty$  faible, mais on ne sait pas

si  $\mu_f = f(u)$  (c'est faux en général, c'est vrai si la conv. est forte; ce sera vrai pour nous car  $u_\tau$  et  $f(u_\tau)$  sont liés par une équation (notre schéma numérique))

• même si  $\mu_f = f(u)$ , a-t-on  $u_\tau + f(u)_x = 0$  ?

Ici il y a un pb, même pour passer à la limite au sens faible.

même sur le pb. linéaire!

on s'occupera plus tard de le montrer

(c'est parce que le flux numérique sur le schéma, c'est pas  $f(u_\tau)$ ); il faut faire apparaître  $f(u_\tau)$  dans le schéma, à la place des flux num.  $g(u_i^n, u_{i+1}^n)$ , et gérer les écarts entre  $g$  et  $f$ .

Argument On suppose  $\mu_f = f(u)$ .

on va avoir 
$$\begin{cases} u_i + (f(u))_x = 0 \\ + C \mathbb{1} \end{cases}$$

• on a  $k h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + k (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) = 0 \Rightarrow \forall x \quad u_i^n = \varphi(x_i, t_n)$ , ou autre chose...

$\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times ]0, \infty[)$ . Puis on somme sur  $i$  et  $n$ :

114) Thierry Gallonet

le premier terme:  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} k h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} \varphi_i^n = A$

; on a  $A+B \Rightarrow$

le second:  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} k h_i \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{h} \varphi_i^n = B$ . (A et B n'ont rien à voir avec les bornes sur  $u_0$  qu'on ne fait par A et B étant

on veut passer à la limite; on fait d'abord la sommation par parties

$A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} k h_i u_i^n \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i u_i^0 \varphi_i^0$   
 $\rightarrow \int u_0 \varphi_x$  (le GFZ)  
 si  $h = \max h_i \rightarrow 0$  et  $k \leq \frac{1}{2L} \min h_i$

Donc, sous ces cond. sur  $h_i$  et  $k$ ,  $A \rightarrow \int u_0 \varphi_x - \int u_0 \varphi_x$ .

On veut mg  $B \rightarrow \int f(u) \varphi_x$ . Si l'on fait la sommation par parties, on tombe sur  $\frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h_i}$ , or  $h_i$  n'est pas la distance de  $x_i$  à  $x_{i+1}$ !

Idee: faire apparaître  $\varphi_{i+1/2}^n, \varphi_{i-1/2}^n$ ; et on insère aussi  $f_i^n$

$f_i^n = f(u_i^n)$ :  $B = \sum_{i,n} k \frac{h_i}{h_i} [ (f_{i+1/2}^n - f_i^n) \varphi_i^n - (f_{i-1/2}^n - f_i^n) \varphi_i^n ]$   
 $\sum \sum k (f_{i+1/2}^n - f_i^n) (\varphi_i^n - \varphi_{i+1/2}^n)$  (terme d'erreur)  
 $\sum \sum k (f_{i-1/2}^n - f_i^n) (\varphi_i^n - \varphi_{i-1/2}^n)$  (terme d'erreur)

Donc  $B = \sum_{i,n} k [ (f_{i+1/2}^n - f_i^n) \varphi_{i+1/2}^n - (f_{i-1/2}^n - f_i^n) \varphi_{i-1/2}^n ] + \text{deux termes reste}$   
 Les produits de ces termes se simplifient!

Donc  $B = \sum_{i,n} k h_i f_i^n \frac{\varphi_{i-1/2}^n - \varphi_{i+1/2}^n}{h_i} + \text{deux termes reste}$

$\rightarrow \int f(u) \varphi_x$   
 (le bon terme!)

Il reste à mg les termes reste tendent vers 0.

on aurait alors  $\int u_0 \varphi_x + \int f(u) \varphi_x + \int u_0 \varphi_x = 0$   
 $(\Rightarrow)$  a solution faible

Contrôle des termes reste:

$D_1 = \sum \sum k (f_{i+1/2}^n - f_i^n) (\varphi_i^n - \varphi_{i+1/2}^n) \leq C \varphi h$ ; donc avec les expressions des  $f_{i+1/2}^n$  et la prop. de constance des,

$|D_1| \leq \sum \sum k |g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)| C \varphi h \leq k \sum_{i,n \text{ corresp. au supp}} |u_i^n - u_{i+1}^n| C \varphi h$

Maintenant: - si on avait l'estimation BV sur  $u(t, \cdot)$ :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i,n}^n - u_i^n| \leq C$$

acceptable pour les schémas "TVD" (total variation decreasing) mais c'est très contraignant: par ex., il n'y a que les maillages cartésiens en dimension  $\geq 1$  qui marchent avec des schémas TVD

On en déduirait directement  $|D_t| \leq h C \sum_{k \sim \text{supp } \varphi} k \leq \tilde{C}_\varphi h \rightarrow 0$   $h \rightarrow 0$

- mais on a besoin de moins que cela!  
 il suffirait d'avoir  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i,n}^n - u_i^n| \leq \frac{C}{h^\alpha}$  avec  $\alpha < 1$ ,  
 et c'est une "estimation BV faible!"  
 Et on a besoin d'avoir moins: on peut "intégrer au temps!"

Conclusion: il nous aurait suffi de

quatre fois "faible"

$$\sum_{k \in \text{supp } \varphi} k |g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)| \leq \frac{C}{h^\alpha}$$

avec  $\alpha < 1$

Ex: si l'on veut cela pour l'espace, pour tout  $t$ , c'est encore faux!

La preuve est technique. À la place, on verra l'équivalent sur le pb. continu.

On peut voir un schéma monotone comme

$$u_t + u_x - Dh u_{xx} \geq 0 \quad \text{c'est particulièrement vrai pour le schéma de Pusanov!}$$

(pour le schéma de Godunov, on a plutôt  $u_t + f(u)_x - h(|f'(u)| u_x)_x$ )

c'est pour cela que notre estimation "BV faible" est en termes de  $g(\cdot, \cdot)$  et non pas en termes des  $u$

l'estimation BV faible vient complètement de la forme de diffusion

$$\text{on fait } u_t + u_x - Dh u_{xx} \geq 0 \quad \forall u$$

(pour le schéma numérique, c'est le terme de "diffusion numérique" introduit dans le schéma à cause de

$$\dots) \int u_t u + \int u_x u - \int Dh u_{xx} u = 0 \quad \text{avec } u(\cdot) \text{ à l'infini}$$

$$\int \left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \int \left(\frac{u^2}{2}\right)_x + \int Dh u_x u_x = 0$$

l'hypothèse de monotonie de  $g(\cdot, \cdot)$  en chacun des deux arguments

$$\Rightarrow \int \frac{u^2}{2}(\tau) - \int \frac{u_0^2}{2} + 0 + \int Dh |u_x|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow Dh \int |u_x|^2 \leq C \Rightarrow \int |u_x|^2 \leq \frac{C}{h}$$

l'équivalent continu de  $H^1$  l'estim. faible

[16] Mais, on veut plutôt BV faible; alors on fait Cauchy-Schwarz sur un compact:  $\int_K |u_x| \leq \left( \int_K |u_x|^2 \right)^{1/2} |K|^{1/2}$  (ici K est un compact)

$\Rightarrow \int_K |u_x| \leq \frac{e}{h^{1/2}}$ , l'estimation BV faible pour  $\delta = 1/2$ .

(fa utiliser la monotonie du schéma)

Maintenant, on regarde le pb. de l'entropie.

on suppose (on admet) que  $\forall g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g(u_0) \rightarrow g(u)$ .

Mais, la solution est entropique.

On se sert la 2<sup>ème</sup> fois de la monotonie. On se contente des entropies de Kruzhkov.

On veut:  $\int |u-k| \rho_\epsilon + \int \text{sign}(u-k) (f(u) - f(k)) \varphi_x + \int |u_0-k| \varphi(x_0) \geq 0$   
 $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+), \varphi \geq 0$ .

On cherche la version discrétisée de ceci. On reprend le schéma

Attention:  $k$  du pas de temps et  $k$  de l'entropie n'ont rien à voir

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} [g(u_i^n, u_i^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)]$$

se réécrit comme  $\triangle$

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_i^n); \quad \left[ \begin{array}{l} H \text{ est monotone par rapport} \\ \text{à chacun de ces arguments} \end{array} \right]$$

De plus,  $k \geq H(k, k, k)$ . (les cond. sur  $g$  + la CFL)  
 (le schéma est exact sur les fonctions constantes)

Si  $\alpha \perp \beta$  désigne  $\max\{\alpha, \beta\}$ , on a

$u_i^{n+1} \perp k \geq H(u_{i-1}^n \perp k, u_i^n \perp k, u_i^n \perp k)$  par la monotonie de  $H(\cdot, \cdot, \cdot)$

le même,  $\alpha \perp \beta := \min\{\alpha, \beta\}$ , et on a

$u_i^{n+1} \perp k \geq H(u_{i-1}^n \perp k, u_i^n \perp k, u_i^n \perp k)$

calcul; cette écriture est une astuce technique

Puis on fait la différence! Comme  $|u_i^{n+1} \perp k - u_i^{n+1} \perp k| = |u_i^{n+1} - k|$

on a  $|u_i^{n+1} - k| \leq u_i^n \perp k - \frac{k}{h_i} [g(u_{i-1}^n \perp k, u_i^n \perp k) - g(u_i^n \perp k, u_i^n \perp k)] -$   
 $- \left( \begin{array}{c} \text{la même ligne avec "T" remplacé par "I"} \end{array} \right) \leq 0$  D'où



Thierry Gallouët

$$|u_i^{n+1} - k| \leq |u_i^n - k| - \frac{k}{h_i} \left[ g(u_i^{n+1} \tau_k, u_i^{n+1} \tau_k) - g(u_i^n \tau_k, u_i^n \tau_k) \right] - \left\{ \text{idem avec } u_i^n, u_i^n \right\}$$

Donc  $\frac{|u_i^{n+1} - k| - |u_i^n - k|}{h_i} + [G_{k, i+\frac{1}{2}}^n - G_{k, i-\frac{1}{2}}^n] \leq 0$

la const. de l'entropie de Kruzhkov  
 pas de temps  
 l'équivalent du schéma numérique de départ, mais qui est maintenant écrit pour l'entropie et le flux d'entropie! (et c'est maintenant une inégalité)

On remarque que  $G_{k, i+\frac{1}{2}}^n(a, a) = f(a \tau_k) - f(a \pm k) = -\text{sign}(a-k)(f(a) - f(k))$

(la deuxième partie de l'astuce technique)

Donc, le flux numérique est consistant avec le flux d'entropie de Kruzhkov!  
 Le passage à la limite est le même que pour la formulation faible (car  $|u_\tau - k| \rightarrow |u - k|$  et  $\text{sign}(u_\tau - k)(f(u_\tau) - f(k)) \rightarrow \text{sign}(u - k)(f(u) - f(k))$ )

Attention: ici  $g$  n'est pas le flux numérique, c'est une fct. quelconque  
 Maintenant: on suppose que

$g(u_\tau) \rightarrow g(u)$   $\leftarrow$   $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (c'est à dire, on identifie  $g = \lim_{\tau \rightarrow \infty} g(u_\tau)$  à  $g(u)$ , où  $u = \lim_{\tau \rightarrow \infty} u_\tau$ )

① méthode classique:  $u_0 \in BV$  et estimation sur  $u_\tau$  dans BV  
 $\Rightarrow$  (th. de Kelly) la compacité forte de  $(u_\tau)_\tau \Rightarrow$  passage à la limite sur toutes les non-linéarités

ça marche pour les schémas TVD:  $\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq \|u_0\|_{BV}$

Rq En multi-D, les seuls schémas TVD sont les schémas sur maillages cartésiens (on a des exemples sur les maillages triangulaires et pls hexaédriques où on n'a pas d'alternance, tout au moins, pas avec la const. 1)

Pb. ouvert: A-t-on le contrôle  $\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq C \|u_0\|_{BV}$ , avec  $C \geq 1$ ?

Autre pb: il est bien plus difficile d'avoir BV que BV faible.

En continu: on fait  $u_x + f(u)_x = 0$ , on dérive par rapport à  $x$ , on multiplie par  $\text{sign}(u_x) \Rightarrow$  on trouve  $\int |u_x| dx$   
 Cette technique est beaucoup plus délicate que ce qu'est BV faible: ça marche plus rarement.

18 Theory Gallouët

② méthode "détournée" : marche pour  $u_0 \in L^\infty$  et en multi-d.

$\Omega$  soit  $Q$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ ,  $(u_n)_n$  une suite bornée dans  $L^\infty(Q)$ .  
(anal. fonct.) Alors il existe une sous-suite (notée encore  $(u_n)$ ) et il existe

$$\left[ \begin{array}{l} u \in L^\infty(Q \times ]0,1[) \text{ et } \forall g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \varphi \in L^1(Q), \\ \int_Q g(u_n) \varphi \rightarrow \int_Q g(u) \varphi \, d\alpha. \end{array} \right.$$

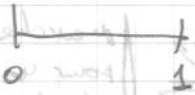
Autrement dit,  $g(u_n(\cdot)) \rightarrow \int_0^1 g(u(\cdot, \alpha)) \, d\alpha$   $L^\infty$ -faible.

On fait exactement la même preuve de convergence, en y intégrant la variable supplémentaire  $\alpha$ .

On obtient alors une sol. processus entropique; une telle solution est unique, et elle ne dépend pas de  $\alpha$  (preuve: répliquer Kruzhkov)

(rajouter partout une intégration en  $\alpha$ ; il n'y a pas d'idée nouvelle pour faire marcher la preuve)

Conditions aux limites On discretise la cond. de Dirichlet par la moyenne.  
On prend  $f_{1/2} = g(u_0^n, u_1^n)$  et souvent on prend un flux différent au bord et à l'intérieur



(au bord, on prend le plus précis;

le flux de Godunov)

car les schémas sont très sensibles à la précision des CB

Il y a dans le schéma, les termes de bord qui survivent.

Il apparaît, dans la preuve de conv. vers une sol. faible, les termes de la forme

$$\left( g(u_0^n \uparrow k, u_1^n \uparrow k) - g(u_0^n \downarrow k, u_1^n \downarrow k) \right) \varphi(0, t_n);$$

on utilisera les monotones de  $g(\cdot, \cdot)$  on aura  $\rightarrow$  on change  $T$  en  $\perp$  grâce à la monotonie

$$\leq \left( g(u_0^n \uparrow k, u_1^n \downarrow k) - g(u_0^n \downarrow k, u_1^n \uparrow k) \right) \varphi(0, t_n) \leq$$

$$\leq M |u_0^n - k| \varphi$$

la constante de Lipschitz de  $g$

On récupère le terme de bord de la condition d'entropie d'Otto!

Comme ça, on obtient la conv. (d'une sous-suite) de  $(u_n)_n$  vers une solution processus entropique du pb. avec CB Dirichlet écrite au sens d'Otto. Comme une telle solution est l'unique sol. entropique, c'est toute la suite  $(u_n)_n$  qui converge vers cette unique solution entropique.