L3 Maths : Cours d'Intégration (partie I)

Noureddine IGBIDA [1]

2012-2013

1. Institut de recherche XLIM, UMR-CNRS 6172, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges 123, Avenue Albert Thomas 87060 Limoges, France. Email : noureddine.igbida@unilim.fr

Table des matières

Université de Limoges

Chapitre 0

Introduction

11/09/201

0.1 Méthode de Riemann

On suppose que $f : [a,b] \to \mathbf{R}^+$. On sait que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la région (de $\mathbf{R}^2$) comprise entre la courbe que represente f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Intuitivement cette quantité est la somme d'une infinité d'accroissement infinitésimaux $dy = f(x)dx$ pour x variant de a à b.

L'idée de Riemann [1] consiste alors à

- subdiviser le segment $[a,b]$ en sous-segments $[a_{i-1}, a_i]$ pour $i = 1, ...n$
- pour chaque i on choisit une valeur λ_i comprise entre la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ (usuellement on prend pour λ_i la valeur de f en un point ξ_i ou encore la borne inférieure ou supérieure de ces valeurs). On remplace alors les accroissements infinitésimaux $f(x)dx$ par les accroissements finis $\lambda_i(a_i - a_{i-1})$ et la somme infinie de ces accroissements infinitésimaux par la somme finie
$$\sum_i^n \lambda_i(a_i - a_{i-1})$$
est appelée **somme de Riemann.**

Cette somme de Riemann est considérée comme une bonne approximation de l'intégrale étudiée dans la mesure où les accroissements finis $\lambda_i(a_i - a_{i-1})$ sont proches des accroissements infinitésimaux $f(x)dx$. Cela suppose que le pas de la subdivision, c'est-à-dire le maximum des $a_i - a_{i-1}$, soit suffisamment petit pour que $\Delta x = a_i - a_{i-1}$, soit proche de l'accroissement infinitésimal dx et que la fonction f soit suffisamment régulière pour varier très peu sur $[a_i, a_{i-1}[$, afin que λ_i soit une bonne approximation de $f(x)$. Cela donne la définition suivante :

Définition 1 *f est dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si et seulement si les sommes de Riemann ont une limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Cette limite est alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ notée*
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

On peut interpréter la méthode de Riemann en considérant que l'on remplace la fonction f par une fonction en escalier constante sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i-1}[$, de valeur λ_i (la valeur aux points de subdivision n'ayant aucune importance). La somme de Riemann est alors l'intégrale de la fonction

1. Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866 à Selasca, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.

en escalier et l'on espère qu'en diminuant le pas de la subdivision cette fonction en escalier sera une approximation suffisante de f pour que son intégrale soit une bonne approximation de celle de f.

Cette méthode a l'avantage d'être simple, de suivre l'intuition que l'on peut avoir de la notion d'intégrale et apporte une solution satisfaisante au problème posé. Elle permet en particulier de prouver que toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur cet intervalle. Elle présente cependant deux inconvénients.

- Le fait que les fonctions en escaliers constituent de bonnes approximations de f suppose une grande régularité de f et la classe des fonctions accessibles par cette méthode est relativement restreinte et peu stable par passage à la limite.
- Par ailleurs, la méthode utilise une subdivision du domaine de définition de f en intervalles ce qui n'a de sens que pour une variable réelle. De ce fait elle se prête mal à des généralisations ne serait-ce qu'à l'intégration de fonctions de plusieurs variables.

0.2 La méthode de Lebesgue

C'est cette méthode que nous allons bien développer dans ce cours. Nous donnons ici une brève description. Dans un but de simplification supposons que la fonction f à intégrer soit bornée, c-à-d $m \leq f(x) \leq M$. Contrairement à la méthode adoptée par Riemann, la méthode de Lebesgue [2] considère une subdivision du domaine de définition de f mais

- on introduit des points de subdivision α_i,
$$\alpha_0 = m \leq \alpha_i \leq ..... \leq \alpha_n = M.$$
- Pour $i = 0, ...n$, on note
$$A_i = \{x \ ; \ \alpha_{i-1} < f(x) \leq \alpha_i\}$$
- L'ensemble des ces parties A_i forment une partition du domaine de définition de f, ce qui permet de définir une fonction ϕ qui est constante sur chaque A_i où elle prend une valeur λ_i comprise entre α_{i-1} et α_i.
- La fonction ϕ est une bonne approximation de f, plus précisément l'écart entre $\phi(x)$ et $f(x)$ est majoré par $\alpha_i - \alpha_{i-1}$. On pourra donc le rendre aussi petit que l'on veut si le pas de la subdivision par les α_i est suffisamment petit.
- L'idée est alors d'approcher l'intégrale de f par celle de ϕ.

Remarque 0.1 *Dans le cas où f est monotone, les A_i sont des intervalles, par suite ϕ est une fonction en escalier dont l'intégrale est*
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i l(A_i)$$
où $l(A_i)$ est la longueur de l'intérvalle A_i. Cette somme est une somme de Riemann et, dans ce cas, il n'y a pratiquement pas de différence entre les deux méthodes

Dans le cas général ϕ est plus compliquée, il s'agit de ce qu'on appelle une fonction étagée. Elle peut s'écrire sous forme
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i},$$

2. Henri-Léon Lebesgue (1875-1941 à Beauvais) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'université de Nancy en 1902. Il fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du XXe siècle.

où $\mathbb{1}_{A_i}$ est la fonction indicatrice de A_i :

$$\mathbb{1}_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et l'intégrale de ϕ vaut

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int \mathbb{1}_{A_i}(x)\, dx.$$

Le problème est alors de définir les intégrales du type

$$\int \mathbb{1}_{A_i}(x)\, dx,$$

pour A une partie quelconque de $\mathbf{R}$. Par définition, cette intégrale est **la mesure de** A.

Dans le cas où A est un intervalle, cette mesure est la longueur de A.

Le but de ce cours, est de généraliser la notion de longueur à des parties qui ne sont plus des intervalles, et donc offrir la possibilité d'intégrer beaucoup plus de fonctions.

Ainsi, nous voyons donc que la méthode de Lebesgue suppose la définition préalable de la mesure de parties de $\mathbf{R}$. La méthode a donc séparé le problème de l'intégration en deux sous problèmes :

- celui de la mesure (c'est-à-dire l'intégration des fonctions indicatrices)
- l'extension de l'intégrale à des fonctions plus générales grâce à l'approximation par des fonctions étagées.

L'approximation par des fonctions étagées étant meilleure que l'approximation par des fonctions en escalier, les fonctions relevant de cette approche peuvent être moins régulières que celles concernées par la théorie de Riemann et forment une classe ayant de grandes propriétés de stabilité.

Mais en fait, l'intérêt essentiel de cette méthode est qu'elle s'applique à bien d'autres théories de la mesure que celle issue de la notion de longueur. Sa portée est considérablement plus grande. **En particulier elle permet de définir l'intégrale de fonctions définies sur n'importe quel ensemble X dès lors qu'on a su définir la mesure de suffisamment de parties de X.**

Chapitre 1

Espace Mesuré

Contenu du chapitre :

1.1 Espace Mesuré

La théorie de l'intégration est une des plus anciennes théories mathématiques. On peut la faire remonter à Archimède [1] et elle plonge ses racines dans la théorie de la mesure des aires qui est encore plus vieille. Ses progrès ont toujours été des progrès décisifs pour l'Analyse toute entière et ils ont été poursuivis jusqu'à nos jours.
Vouloir mesurer, c'est tout d'abord définir ce qui est à mesurer (ce qui est mesurable) et comment on mesure. En général ce qui est à mesurer est une famille $\mathcal{T}$ de parties d'un ensemble Ω, le "comment" est représenté par une fonction $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}^+ = \mathbf{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$ (appelée mesure). Ainsi , à tout élément A de $\mathcal{T}$, on associe un nombre positif (éventuellement égal à $+\infty$), $\mu(A)$, dit mesure de A. Bien entendu la famille $\mathcal{T}$ ne sera pas n'importe quelle famille de parties de Ω (notion de tribu : paragraphe I.1) et l'application μ devra posséder certaines propriétés (notion de mesure : paragraphe 1.2). Voilà l'objet de ce premier chapitre.

1.2 Tribu

Soit Ω un ensemble. On rappelle tout d'abord les notions ensemblistes suivantes :
$\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de Ω.
Soit I un ensemble d'indices, (I peut être fini : $I = \{1, \ldots, n\}$, infini dénombrable : $I = \mathbf{N}$, ou non dénombrable).

1. Archimède de Syracuse, 287-212 av. J.-C. à Syracuse, est un grand scientifique grec de Sicile (Grande Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur. Il est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps. Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole avec la somme d'une série infinie et a donné un encadrement de π d'une remarquable précision. Il a également introduit la spirale qui porte son nom, des formules pour les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, la réunion et l'intersection des éléments de la famille sont définis par :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in \Omega; \quad \exists j \in I, x \in A_j\} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in \Omega; \quad \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Propriétés de distributivité :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcap C = \bigcup_{i\in I} (A_i \bigcap C); \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \bigcup C = \bigcap_{i\in I} (A_i \bigcup C)$$

Si $I = \{1, \ldots, n\}$, on peut noter $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Si $I = \mathbb{N}$, on peut noter $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i$.

Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ on note A^C le complémentaire de A dans Ω défini par :

$$A^C = \{x \in \Omega; x \notin A\} = \Omega \setminus A$$

On a les propriétés **(dites de Morgan)** :

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)^C = \bigcap_{i\in I} (A_i^C) \text{ et } (\bigcap_{i\in I} A_i)^C = \bigcup_{i\in I} (A_i^C)$$

Exercice 1.1 [résultat réutilisé]. Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.On pose :

$$B_n = A_n \cap (\bigcup_{p=0}^{n-1} A_p)^C \text{ avec } B_0 = A_0$$

Montrer que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

et que les B_i sont disjoints deux à deux.

(Cela signifie que toute réunion dénombrable peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties deux à deux disjointes. On remarquera aussi que si les A_n sont des élements d'une tribu $\mathcal{T}$, alors les B_n appartiennent aussi à cette tribu.)

Remarque 1 *On peut faire quelques remarques sur la notion de dénombrable :*

- Dans ce cours, dénombrable signifie en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Un ensemble dénombrable est donc soit fini soit infini dénombrable.

- Il faut aussi savoir qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Attention : ne pas confondre image réciproque et sa notation $f^{-1}(B)$ avec l'application inverse de f qui n'a de sens que lorsque f est bijective.

Propriétés immédiates : soit B une partie de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ alors :

$$f^{-1}(B^C) = (f^{-1}(B))^C \text{ , } f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \text{ et } f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

Pour vérifier par exemple la relation $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ on procède comme suit (en utilisant les définitions de réunion et d'image réciproque) :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Longleftrightarrow \exists j \in I \text{ tel que } f(x) \in B_j \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j \in I \text{ tel que } x \in f^{-1}(B_j) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

Définition 1.2.1 *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une famille de parties de Ω.*

$\mathcal{T}$ est une **tribu** *si :*

i) $\Omega \in \mathcal{T}$.

ii) Si $A \in \mathcal{T}$, alors $A^C \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par complémentaire).

iii) Si $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{n\in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable).

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé **espace mesurable***.*

Propriétés immédiates :

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$. En effet : $\Omega \in \mathcal{T}$ donc $\Omega^C = \emptyset \in \mathcal{T}$.

b) $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ (en effet : $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} A_n = (\bigcup_{n\in \mathbb{N}} A_n^C)^C$).

Exemples : 1) soit Ω un ensemble, alors $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

2) tribu d'un ensemble fini à deux éléments : si $\Omega = \{1, 2\}$,il n'existe que deux tribus sur Ω qui sont :

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$$

3) soit Ω un ensemble et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$ est une tribu. Plus généralement, on admettra que toute tribu finie de Ω a un nombre d'éléments de la forme 2^n.

4) soit Ω un ensemble et $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega); \quad A$ ouA^C est dénombrable $\}$. $\mathcal{T}$ est une tribu.

Exercice 1.2 [Application immédiate et résultat utile]. Soient Ω et E deux ensembles et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application.

1. Si $\mathcal{B}$ est une tribu de E, on note :

$$\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$$

   Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω (appelée image réciproque de la tribu $\mathcal{B}$).
   Dans le cas où Ω est une partie de E et f définie par $f(x) = x$ pour tout x, on a : $\mathcal{T} = \{\Omega \bigcap B; B \in \mathcal{B}\}$ et on dit que $\mathcal{T}$ est la tribu de Ω induite par la tribu $\mathcal{B}$ de E.
2. Exemple : $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}, \quad E = \{0, 1, 4\}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{P}(E), \quad f : x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\mathcal{P}(E))$.
3. Si $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω, alors $f(\mathcal{T}) = \{f(B); \quad B \in \mathcal{T}\}$ n'est en général pas une tribu de E. Donner un exemple.

Attention à l'erreur suivante : Montrer iii) de la définition d'une tribu n'est pas équivalent à montrer (par exemple en utilisant un raisonnement par récurrence) :

Toute suite $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{T}$$

On ne prend alors en compte que les réunions finies alors que la propriété vise les unions **dénombrables**.

On pourra considérer le contre-exemple suivant :

$\mathcal{T} =$ ensemble des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$.

$\mathcal{T} =$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{R}$, car aucune des propriétés i), ii) ou iii) n'est vérifiée.

Au sujet de iii) :

Il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{T}$:

prendre $A_n = [-n, n]$ on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n =]-\infty, +\infty[$ donc iii) n'est pas vérifiée et pourtant on a :

Une suite quelconque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ vérifie :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{T}$

Proposition 1.2.2 *Soit Ω un ensemble et $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus de Ω. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ est une tribu.*

Démonstration

i) Pour tout $i \in I$, $\Omega \in \mathcal{T}_i$ donc $\Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$.

ii) Soit $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$, alors pour tout $i \in I$, $A \in \mathcal{T}_i$ donc pour tout $i \in I$, $A^C \in \mathcal{T}_i$ donc $A^C \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$.

iii)Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite déléments de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$, alors pour tout i, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite déléments de $\mathcal{T}_i$, donc pour tout i, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$.

Cette proposition implique le résultat suivant, important pour la construction de tribus.

Proposition 1.2.3 *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C}$ une famille d 'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. Il existe une plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$. Elle s'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et est notée $\sigma(\mathcal{C})$.*

Démonstration

L'ensemble des tribus contenant $\mathcal{C}$ n'est pas vide puisque $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ répond alors à la question. (A noter que l'idée de tribu engendrée par ... est à rapprocher de celle de sous-espace vectoriel engendré par ...)

Exercice 1.3 [Application immédiate et résultat utile] : Soit Ω un ensemble et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{A\}$.

Exemple de la tribu de Borel[2] sur $\mathbb{R}$:

Elle est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On considère $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Par définition $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$. Nous verrons plus loin que les éléments de cette tribu (appelés encore parties Boréliennes de $\mathbb{R}$, ou Boréliens de $\mathbb{R}$) sont les parties de $\mathbb{R}$ dont on peut définir une "longueur" prolongeant celle définie sur les intervalles (longueur de $[a, b] = b-a$).

2. Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956, Paris), mathématicien, professeur à la Faculté des sciences de Paris, spécialiste de la théorie des fonctions et des probabilités, membre de l'Académie des sciences, est aussi un homme politique français, député, ministre.

On admettra que $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est distinct de $\mathcal{P}(\mathbf{R})$. La démonstration sera donnée dans un complément.

De même $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ est la tribu de $\overline{\mathbf{R}}$ engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbf{R}}$.

Rappelons que $\overline{\mathbf{R}}$ est obtenu en adjoignant à $\mathbf{R}$ les deux élements $+\infty$ et $-\infty$ et que la topologie de $\overline{\mathbf{R}}$ est celle dans laquelle les points $-\infty$ et $+\infty$ ont respectivement pour base de voisinages :

$$\{[-\infty, -n[; n \in \mathbf{N}\} \text{ et } \{]n, +\infty], n \in \mathbf{N}\}$$

et tout autre point x de $\mathbf{R}$, la base de voisinages :

$$\{]x - 1/n, x + 1/n[; n \in \mathbf{N}^*\}$$

Proposition 1.2.4 *La tribu de Borel $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ est la tribu de $\boldsymbol{R}$ engendrée par l'une des familles suivantes :*

i) la famille des fermés de $\boldsymbol{R}$.

ii) la famille des intervalles de $\boldsymbol{R}$ de la forme $]a, b]$, a et $b \in \boldsymbol{R}$.

Résultat analogue en remplaçant $]a, b]$ par $[a, b[$ ou $]a, b[$ ou $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, b[$ ou $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$.

Tout élément de la tribu de Borel de $\mathcal{B}(\overline{\boldsymbol{R}})$ est obtenu en prenant la réunion d'un élément de $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ et d'une partie de $\{-\infty\ , +\infty\}$.

Démonstration

1) soit $\mathcal{F} = \{F;\ F$ fermé de $\mathbf{R}\}$. Pour tout F dans $\mathcal{F}$, F^C est ouvert donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbf{R})$; ainsi $F = (F^C)^C$ est dans $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, et donc $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Comme $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$, on a $\sigma(\mathcal{F})$ inclus dans $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Réciproquement, soit $\mathcal{O} = \{O; O$ ouvert de $\mathbf{R}\}$; avec un raisonnement analogue, on a $\mathcal{O}$ inclus dans $\sigma(\mathcal{F})$, et par suite $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est inclus dans $\sigma(\mathcal{F})$.

Ainsi $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est égal à $\sigma(\mathcal{F})$.

2) On note

$$\mathcal{C}_1 = \{]-\infty, b]; b \in \mathbf{R}\}; \mathcal{C}_2 = \{]a, b]; a \text{ et } b \in \mathbf{R}\}; \mathcal{C}_3 = \{]a, b[; a \text{ et } b \in \mathbf{R}\}$$

* On a $\mathcal{C}_1$ inclus dans $\mathcal{F}$, d'où $\mathcal{C}_1$ inclus dans $\sigma(\mathcal{F})$, et $\sigma(\mathcal{C}_1)$ inclus dans $\sigma(\mathcal{F})$.

* Pour tous a et b dans $\mathbf{R}$ on a :

$$]a, b] =]-\infty, b] \cap]-\infty, a]^C \in \sigma(\mathcal{C}_1)$$

ainsi $\mathcal{C}_2$ est inclus dans $\sigma(\mathcal{C}_1)$, et $\sigma(\mathcal{C}_2)$ est inclus dans $\sigma(\mathcal{C}_1)$.

* Pour tous a et b dans $\mathbf{R}$ on a :

$$]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbf{N}}]a, b - 1/n] \in \sigma(\mathcal{C}_2)$$

d'où $\mathcal{C}_3$ est inclus dans $\sigma(\mathcal{C}_2)$, et $\sigma(\mathcal{C}_3)$ est inclus dans $\sigma(\mathcal{C}_2)$.

* On rappelle le résultat suivant de topologie : tout ouvert O de $\mathbf{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbf{R}$. On en déduit que $\mathcal{O}$ est inclus dans $\sigma(\mathcal{C}_3)$, et $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est inclus dans $\sigma(\mathcal{C}_3)$. On a donc :

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \sigma(\mathcal{C}_3) \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

D'où :

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\mathcal{C}_3) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{F})$$

Démonstration analogue pour les autres familles d'intervalles.

Cas de $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ (Ex)

Solution : Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de $\overline{\mathbf{R}}$ qui sont réunion d'un élément de $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ et d'une partie de $\{-\infty\ ,+\infty\}$, et $\mathcal{C}' = \{A \cap \mathbf{R}; A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})\}$. On vérifie que $\mathcal{C}$ est une tribu de $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$, contenant les ouverts de $\overline{\mathbf{R}}$. On a donc $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ inclus dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ inclus dans $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

D'autre part $\mathcal{C}'$ est une tribu de $\mathbf{R}$, contenant les ouverts de $\mathbf{R}$ (parcequ'ils sont aussi ouverts de $\overline{\mathbf{R}}$) donc $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}'$. Ceci prouve que $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \mathcal{C}'$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}) = \mathcal{C}$.

Remarque 2
- *Tout singleton $\{x\}$ est un borélien (c'est un fermé), et $\mathbb{Q}$, réunion dénombrable de singletons est un Borélien ainsi que $\mathbb{Q}^C$.*
- *Il n'existe pas de caractérisation simple des Boréliens. En particulier,* **ne pas croire qu'un Borélien est nécessairement une réunion dénombrable d'intervalles disjoints** *(généralisation abusive de la propriété des ouverts...).*
- *Le borélien $\mathbb{Q}^C$ ne contient aucun intervalle non vide autre que les singletons, et ne peut donc être réunion dénombrable d'intervalles.*

1.3 Mesures :

Remarques préliminaires et rappels :

1- L'addition, définie sur $\mathbf{R}$, peut être prolongée à $\overline{\mathbf{R}}^+ = \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ grâce à la convention :

$$\text{pour tout } x \in \overline{\mathbf{R}}^+\ ,\ x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$$

Par contre $(+\infty) - (+\infty)$ n'a pas de sens.

2- Etant donnée une famille infinie dénombrable $\{a_i; i \in \mathbf{N}\}$ d'éléments de $\overline{\mathbf{R}}^+$, la somme infinie $\sum_{i\in\mathbf{N}} a_i$ a toujours un sens dans $\overline{\mathbf{R}}^+$: c'est $+\infty$ si un des a_i est égal à $+\infty$, sinon c'est par définition, $\lim_{p\to+\infty}(\sum_{i=0}^{p} a_i) = \sup_{p\in\mathbf{N}}(\sum_{i=0}^{p} a_i)$, valeur finie ou égale à $+\infty$. Cette somme est indépendante de l'ordre de sommation et si on a une partition $\mathbf{N} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$ avec $I_n \cap I_m = \emptyset$ pour $m \neq n$, alors $\sum_{i\in\mathbf{N}} a_i = \sum_{n\in\mathbf{N}} (\sum_{i\in I_n} a_i)$ (associativité ou "sommation par paquets"). Se rappeler que tout ceci n'est vrai que parcequ'on se limite à des termes positifs. (Voir démonstration en complément 1 à la fin du chapitre.) Bien voir aussi que la somme $(\sum_{i\in I} a_i)$ n'a de sens que si l'ensemble I est dénombrable.

Cas particulier des séries doubles à termes positifs ($a_{mn} \in \overline{\mathbf{R}}^+$) . Du fait de la positivité des termes on a :

$$\sum_{m\in\mathbf{N}} (\sum_{n\in\mathbf{N}} a_{mn}) = \sum_{n\in\mathbf{N}} (\sum_{m\in\mathbf{N}} a_{mn})$$

Définition 1.3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable.Une application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbf{R}}^+$ est une mesure si :*

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Cette propriété est dite σ-additivité de μ.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé **espace mesuré**.

Remarque et vocabulaire :

* Dans la définition de σ-additivité la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ a toujours un sens dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

* Une application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ est dite **additive** si $\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$ pour toute suite finie d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Bien entendu la σ-additivité implique l'additivité, la réciproque étant fausse en général.

* Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est dite **finie** ou **bornée** si $\mu(\Omega) < +\infty$.

Dans le cas où $\mu(\Omega) = 1$, μ est appelée **probabilité** et $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un **espace probabilisé**.

* Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est dite σ**-finie** s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ vérifiant $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < +\infty$.

* Dans ce cours nous nous limiterons à des mesures positives (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$) bien qu'on définisse par ailleurs des mesures à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 1.4 .

Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

1) Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{T}$ alors :

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcap B)$$

2) Si A , B , C sont dans $\mathcal{T}$ alors :

$$\mu(A \bigcup B \bigcup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \bigcap B) - \mu(A \bigcap C) - \mu(B \bigcap C) + \mu(A \bigcap B \bigcap C)$$

Exemples :

0) Exemples intuitifs : Soit Ω un solide symbolisé par une partie de $\mathbb{R}^3$. On utilise couramment deux mesures distinctes sur Ω : la "mesure-volume" et la "mesure-masse", cette dernière dépendant de la répartition des masses dans Ω.

1) Soit l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On pose pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{card} A & \text{si le nombre d'éléments } \mathrm{card} A \text{ de } A \text{ est fini ,} \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelée **mesure de dénombrement**. Cette mesure est finie si Ω est un ensemble fini. Elle est σ-finie si Ω est dénombrable.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $a \in \Omega$. On pose, pour $A \in \mathcal{T}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \text{ ,} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ appelée **mesure de Dirac** au point a et est notée δ_a, (cet exemple correspond à la "mesure-masse" pour un solide dont la masse est concentrée en un point). Cette mesure est finie et c'est une probabilité.

A noter que l'on a aussi $\delta_a(A) = 1\!\!1_A(a)$ où $1\!\!1_A$ est la fonction indicatrice de A qui est l'application de Ω dans $\{0, 1\}$ définie pour x dans Ω par :

$$1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \text{ ,} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Assez souvent en probabilité, la mesure de Dirac au point a est notée ϵ_a.

Proposition 1.3.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.*

1) Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{T}$ tels que $A \subset B$, alors on a :

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite déléments de $\mathcal{T}$, alors on a :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

3) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante déléments de $\mathcal{T}$, (pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$) , alors on a :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

4) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante déléments de $\mathcal{T}$, (pour tout n, $A_{n+1} \subset A_n$), telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0})$ soit fini ; alors :

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Démonstration

1) si $A \subset B$ alors $B = A \bigcup (B \bigcap A^C)$
or $B \bigcap A^C \in \mathcal{T}$ et $A \bigcap (B \bigcap A^C) = \emptyset$
d'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \bigcap A^C)$.
On a donc $\mu(A) \leq \mu(B)$, car μ est à valeur dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.
2) En utilisant l'exercice 1 on a :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

avec $B_n = A_n \bigcap (\bigcup_{p=0}^{n-1} A_p)^C$.

Les B_n sont deux à deux disjoints et éléments de $\mathcal{T}$, de plus :

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_n) \text{ car } B_n \subset A_n$$

On a donc :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

3) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante déléments de $\mathcal{T}$. On pose $B_0 = A_0$ et pour $n \geq 1$,

$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B_n \in \mathcal{T}$; les B_n sont deux à deux disjoints et $A_n = \bigcup_{p=0}^{n} B_p$, d'où :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ et}$$

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \quad = \quad \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \mu(B_p) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{p=0}^{n} B_p) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

4) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$. On suppose pour simplifier les notations que $\mu(A_0) < +\infty$. On note, pour $n \geq 1\, C_n = A_0 \setminus A_n$. Alors $(C_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\bigcup_{n\geq 1} C_n = A_0 \setminus (\bigcap_{n\geq 1} A_n)$. On a, d'après 3) :

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \text{ d'où}$$

$$\mu(A_0 \setminus (\bigcap_{n\geq 1} A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_0 \setminus A_n)$$

Or la suite (A_n) est décroissante et $\mu(A_0) < +\infty$, donc pour tout $n, \mu(A_n) < +\infty$ donc :

$$\mu(A_0 \setminus A_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$$

(car $A_0 = (A_0 \setminus A_n) \bigcup A_n$, avec $\mu(A_0)$ et $\mu(A_n)$ finis).

De même :

$$\mu(A_0 \setminus (\bigcap_{n\geq 1} A_n)) = \mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n)$$

Ainsi :

$$\mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Remarque 3 *La propriété ci-dessus concernant les suites croissantes est très importante. Elle pourrait d'ailleurs remplacer la propriété de σ-additivité. Elle a pour signification profonde la continuité de la mesure. C'est Lebesgue qui le premier a dégagé cette propriété. Nous verrons plus loin que les grands théorèmes d'intégration, comme par exemple le théorème de convergence dominée, reposent essentiellement sur cette propriété.*

1.4 Construction de mesures. Exemple de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Dans ce paragraphe nous donnons quelques idées de la théorie générale de la mesure. Certaines démonstrations seront volontairement omises car trop longues et techniques. L'application à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et les propriétés de celle-ci sont très importantes. En effet la mesure de Lebesgue est d'un usage très fréquent en intégration, probabilité, analyse...

Proposition 1.4.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, ν et $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des mesures sur $(\Omega, \mathcal{T})$, a un réel positif. Pour A dans $\mathcal{T}$ on pose :*

$$(a\nu)(A) = a.\nu(A) \text{ et } (\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i)(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(A)$$

alors $a\nu$ et $\mu = (\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i)$ sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Démonstration (Ex)

Exercice 1.5 .

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable , $(\mu_i)_{1\leq i\leq n}$, n mesures sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$, n réels positifs. Pour A dans $\mathcal{T}$ on pose :

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A)$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ notée $\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu_i$.

Remarque 4 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un ensemble mesurable, I une partie de $\mathbf{N}$, $(a_i)_{i\in I}$ une suite de réels positifs , $(x_i)_{i\in I}$ une suite d'éléments de Ω et $(\delta_{x_i})_{i\in I}$ la suite de mesures de Dirac associées aux points x_i ($\delta_{x_i}(A) = 1$,ou, 0 selon que x_i appartient ou non à A).*

Alors la mesure $\mu = \sum_{i\in I} a_i \delta_{x_i}$ est par définition **une mesure discrète**.

(Illustration : solide dont la masse est condensée en des points x_i avec les valeurs a_i) Si Ω est un ensemble dénombrable, toute mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est du type précédent.

En particulier la mesure de dénombrement peut s'écrire $\sum_{i\in\Omega} \delta_i$.

Presque tous les exemples de mesures donnés jusqu'à présent étaient de type discret. Il est temps d'introduire les exemples correspondants aux notions usuelles de longueur, aire, volume ... Dans ce premier chapitre nous nous contenterons de définir la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ correspondant à la "longueur" des intervalles ; il faudra attendre les chapitres suivants pour parler de mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ (aires et volumes). Le procédé utilisé est un procédé de prolongement de la famille des intervalles à la famille $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Définition 1.4.2 *Soit Ω un ensemble. Une famille $\mathcal{S}$ de parties de Ω est un* **semi-anneau** *si :*

$\mathcal{S}$ est stable par intersection finie.

Pour tout A et B de $\mathcal{S}$, $A \bigcap B^C$ est réunion finie d'éléments de $\mathcal{S}$ deux à deux disjoints.

Exemple fondamental : (le seul utilisé dans ce cours)

$\Omega = \mathbf{R}, \mathcal{S} = \{[a, b[; a$ et $b \in \mathbf{R}\}$ est un semi-anneau. En effet :

$$[a_1, b_1[\bigcap [a_2, b_2[= [\mathrm{Max}(a_1, a_2), \mathrm{Min}(b_1, b_2)[$$

et $[a_1, b_1[\bigcap ([a_2, b_2[)^C = [a_1, \mathrm{Min}(b_1, a_2)[\bigcup [\mathrm{Max}(a_1, b_2), b_1[$ (intervalles disjoints)

Théorème 1 (Prolongement d'une mesure) . *Soit Ω un ensemble, $\mathcal{S}$ un semi-anneau et $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbf{R}^+}$ une fonction σ-additive sur $\mathcal{S}$, c'est-à-dire vérifiant , pour toute suite d'éléments $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{S}$, deux à deux disjoints, dont la réunion est dans $\mathcal{S}$:*

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(A_i)$$

Alors il existe une mesure μ' définie sur la tribu $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{S})$ engendrée par $\mathcal{S}$, et prolongeant μ (c.à.d. pour tout $A \in \mathcal{S}, \mu'(A) = \mu(A)$).

De plus *si μ est σ-finie sur $\mathcal{S}$ (c.à.d. $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$, avec $A_i \in \mathcal{S}$ et $\mu(A_i) < +\infty$) alors le prolongement μ' est* **unique**.

Remarque 5 *Ce théorèrème, que nous admettrons, permet de "fabriquer" une mesure (voir exemple plus loin), et en utilisant l'unicité, permet aussi de montrer l'égalité de mesures.*

Proposition 1.4.3 (Mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$) .
On considère le semi-anneau $\mathcal{S} = \{[a,b[\,, a$ et $b \in \boldsymbol{R}\}$ et on pose :

$$\ell([a,b[) = \begin{cases} b-a & \text{si } b \geq a \;, \\ 0 & \text{sinon} \;. \end{cases}$$

Alors ℓ est σ-additive et σ-finie sur $\mathcal{S}$. On appelle mesure de Lebesgue sur $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ le prolongement de ℓ à la tribu $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ engendrée par $\mathcal{S}$ et on la note λ. Cette mesure est σ-finie.

Remarque 6 *la tribu $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ apparait comme l'ensemble des parties de $\boldsymbol{R}$ sur lequel on sait prolonger la mesure "naturelle" des longueurs ℓ. On démontre dans le complément 2 qu'il est impossible de prolonger ℓ à toutes les parties de $\boldsymbol{R}$.*

Démonstration de la σ-additivité de ℓ sur $\mathcal{S}$: (à titre d'exemple de démonstration).

1) **ℓ est additive sur $\mathcal{S}$:**

Soit $([a_i, b_i[_{1\leq i \leq n})$, une famille finie d'éléments non vides de $\mathcal{S}$ ($a_i < b_i$), deux à deux disjoints, dont la réunion est élément de $\mathcal{S}$. En changeant la numérotation des intervalles, on peut supposer que :

$$a_1 < b_1 = a_2 < \ldots < b_{n-1} = a_n < b_n$$

On a donc :

$$\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i[= [a_1, b_n[$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ell(\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i[) &= b_n - a_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} \ell([a_i, b_i[) \end{aligned}$$

2) **ℓ est σ-additive sur $\mathcal{S}$:**

Soit $([a_i, b_i[\,, i \in \mathbb{N})$ une famille infinie dénombrable d'éléments non vides de $\mathcal{S}$, deux à deux disjoints, dont la réunion est l'intervalle $[a,b[\in \mathcal{S}$. Remarquons d'abord qu'on ne peut pas renuméroter comme on l'a fait précédemment, les intervalles de manière à avoir ;

$$a_0 < b_0 = a_1 < b_1 = \ldots = a_n < b_n = a_{n+1} < \ldots$$

(On aurait alors tous les $\bigcup_{n=0}^{p} [a_n, b_n[$ dans $\mathcal{S}$).

Exemple : les intervalles $[0,1[$ et $[-1/n, -1/(n+1)[$ pour $n \geq 1$, de réunion $[-1,1[$, ne peuvent être numérotés en respectant l'ordre des bornes.

Ceci explique qu'il n'y a pas de démonstration courte de la σ-additivité.

* La première étape consiste à prolonger la définition de ℓ aux réunions finies d'intervalles de $\mathcal{S}$ deux à deux disjoints, qui ne sont pas dans $\mathcal{S}$ (exemple : $[0,2[\bigcup[3,4[$).

Si $Z = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i \in \mathcal{S}$, $X_i \bigcap X_k = \emptyset$ si $i \neq k$, on pose évidemment :

$$\ell(Z) = \sum_{i=1}^{n} \ell(X_i)$$

Il reste à vérifier que cette définition est cohérente, c'est à dire ne dépend pas du découpage de Z choisi, autrement dit si on a :

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n} X_i = \bigcup_{j=1}^{m} Y_j \text{ avec } Y_j \in \mathcal{S} \text{ et } Y_j \bigcap Y_k = \emptyset \text{ si } j \neq k$$

a-t-on $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ell(X_i) = \sum_{j=1}^{m} \ell(Y_j)$? ?

Il suffit de remarquer que :

$$X_i = \bigcup_{j=1}^{m} (X_i \bigcap Y_j) \text{ et } Y_j = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i \bigcap Y_j)$$

On utilise l' additivité de l et on obtient puisque les $X_i \bigcap Y_j$ sont deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \ell(X_i) &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} \ell(X_i \bigcap Y_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \ell(X_i \bigcap Y_j)) = \sum_{j=1}^{m} \ell(Y_j) \end{aligned}$$

On peut alors vérifier (on admettra ...) que si Z et Z' sont des réunions finies d'intervalles de $\mathcal{S}$, on a :

(1) $Z \subset Z' \Rightarrow \ell(Z) \leq \ell(Z')$

(2) $\ell(Z \bigcup Z') \leq \ell(Z) + \ell(Z')$

(3) additivité du prolongement de ℓ : si $Z \bigcap Z' = \emptyset$ alors $\ell(Z \bigcup Z') = \ell(Z) + \ell(Z')$

* deuxième étape, σ-additivité : si $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[= [a, b[\in \mathcal{S}$, avec $[a_i, b_i[\bigcap [a_k, b_k[= \emptyset$ pour $i \neq k$, alors $\displaystyle\ell(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell([a_n, b_n[)$.

(i) On a :

$$\bigcup_{n=0}^{p} [a_n, b_n[\subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[\text{ pour tout } p \in \mathbb{N}$$

d'où, d'après (1) :

$$\ell(\bigcup_{n=0}^{p} ([a_n, b_n[)) \leq \ell(\bigcup_{n=0}^{+\infty} ([a_n, b_n[))$$

D'après (3) :

$$\ell(\bigcup_{n=0}^{p} [a_n, b_n[) = \sum_{n=0}^{p} \ell([a_n, b_n[)$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{p} \ell([a_n, b_n[) \leq \ell(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[)$$

On fait tendre p vers $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ell([a_n, b_n[) \leq \ell(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[)$$

(ii) Montrons que pour tout $\epsilon > 0\,, \epsilon < b-a$, on a :

$$\epsilon + \sum_{n=0}^{+\infty} \ell([a_n, b_n[) \geq \ell(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[)$$

Pour pouvoir se ramener au cas fini et à l'additivité de ℓ, on remplace $[a, b[$ par le compact $[a, b-\frac{\epsilon}{2}]$ et les $[a_n, b_n[$ par les ouverts $]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[$. On a :

$$[a, b[= \bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[\Longrightarrow [a, b-\frac{\epsilon}{2}] \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[$$

On peut extraire du recouvrement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[$ du compact $[a, b-\frac{\epsilon}{2}]$ un recouvrement fini ; il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$[a, b-\frac{\epsilon}{2}] \subset \bigcup_{n=0}^{p} [a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[$$

On a donc, a fortiori :

$$[a, b-\frac{\epsilon}{2}[\subset \bigcup_{n=0}^{p} [a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[$$

Donc d'après (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \ell([a, b-\frac{\epsilon}{2}[) &= b-a-\frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \ell(\bigcup_{n=0}^{p} [a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[) \\ &\leq \sum_{n=0}^{p} \ell([a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p} \ell([a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[) &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \ell([a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n[) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - a_n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

En utilisant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}$, on obtient finalement :

$$\ell([a, b-\frac{\epsilon}{2}[) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \ell([a_n, b_n[) + \frac{\epsilon}{2}$$

D'où :

$$\ell(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n[) = \ell([a, b[) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \ell([a_n, b_n[) + \epsilon$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient :

$$\ell(\bigcup_{n=0}^{+\infty}[a_n, b_n[) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \ell([a_n, b_n[)$$

CQFD.

Exercice 1.6 .

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, ($\lambda$, mesure de Lebesgue) ; pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ on note : $A + a = \{x + a$ tels que $x \in A\}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1) Montrer que :

$$\mathcal{T}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_a$ puis que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_a$.

3) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on pose $\mu(A) = \lambda(A + a)$. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

4) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a : $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ (invariance de la mesure de Lebesgue par translation.

1.5 Ensembles négligeables

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 1.5.1 *Une partie A de Ω est dite* **négligeable** *s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que :*

$$A \subset B, \text{ et } \mu(B) = 0$$

Proposition 1.5.2 *Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable. La réunion d'une famille dénombrable de parties négligeables est négligeable.*

Démonstration

La première assertion est immédiate.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties négligeables.

$$A_n \subset B_n \in \mathcal{T} \text{ avec } \mu(B_n) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T} \text{ et } \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = 0$$

Donc $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$, d'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est négligeable.

Exemples : dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

* Pour tout x dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. On peut voir à ce sujet que la σ-additivité de la mesure ne peut s'étendre aux familles non dénombrables. On peut écrire $I = [0, 1] = \bigcup_{i\in I}\{i\}$, on a : $\lambda(\{i\}) = 0$ et pourtant $\lambda(I) \neq 0$.

* $\mathbb{Q}$ est négligeable car réunion dénombrable de singletons.

* Il existe des parties non dénombrables de $\mathbb{R}$, mesurables, et de mesure nulle. (Voir complément 3).

Définition 1.5.3 *Une propriété associée à l' ensemble Ω est dite vraie* **presque partout** *(ceci est noté vraie p.p) si l'ensemble des éléments de Ω qui ne possède pas cette propriété est négligeable.*

Exemples : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.

On dit que f est nulle presque partout ($f = 0$ p.p) si l'ensemble :

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$$

est négligeable.

Les résultats fondamentaux à retenir :

- définition d'une tribu, tribu engendrée, exemples : $\mathcal{P}(\Omega), \mathcal{B}(\mathbf{R})$.
- définition d'une mesure et propriété pour les suites monotones.
- exemples des mesures de Dirac, des mesures discrètes et de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}$.
- définition d'un ensemble négligeable.

On doit faire l'effort de comprendre les démonstration proposées (la démonstration de la σ-additivité de la longueur des intervalles peut cependant être considérée comme facultative).

Fin du chapitre 1

Chapitre 2

Applications mesurables. Intégrale associée à une mesure (définition)

Contenu du chapitre :

Chapitre 3

Propriétés de l'intégrale, théorèmes de convergence

Contenu du chapitre :

I - Propriétés de l'intégrale.
II- Théorèmes de convergence.
III- Applications des théorèmes de convergence ; (intégrales semi-convergentes. Intégrales dépendant d'un paramètre).
IV-Rappels de premier cycle. (convergence des intégrales de Riemann généralisées. Séries numériques.

Chapitre 4

Espace produit. Théorème de Fubini

Contenu du chapitre :

I - Mesure produit, théorème de Fubini.
II- Théorème de changement de variable.

Chapitre 5

Espaces L^p

Contenu du chapitre 5