Sommaire

Chapitre 1

Résolution d'équations différentielles linéaires par les fonctions usuelles

F. Ulmer[1] et J. -A. Weil[2] **Version préliminaire 12, 5 avril 2000**

Dans ce chapitre, on se propose de montrer un éventail des outils de résolution explicite des équations différentielles linéaires que l'on peut trouver dans un système de calcul formel. Plutôt que de détailler les théories sophistiquées sous-jacentes (théorie de Galois différentielle), nous procédons par d'abondants exemples, illustrés par des calculs réalisés avec le logiciel MAPLE[3] V.5.

1.1 Introduction

1.1.1 *Historique*

En 1833, Joseph Liouville publie au Journal de l'École Polytechnique (22ième cahier) deux mémoires *Sur la détermination des Intégrales dont la valeur est algébrique*. Son but est de montrer que l'intégrale de certaines fonctions algébriques n'est pas algébrique (une fonction est algébrique si elle vérifie une équation polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}(x)$) . Soit f une fonction algébrique, par exemple

$$f = \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{x}}\,(1+\sqrt{x})}}{x\,(x-1)}.$$

Elle est définie par son polynôme minimal $P(f) := \sum_{i=0}^{n} \phi_i f^i = 0$ avec $\phi_i \in C(x)$; dans l'exemple :

$$P(f) = f^4 + \frac{1}{8}\,\frac{(x-1)^3}{x-2} f^2 - \frac{1}{256}\,\frac{(x-1)^6}{x-2}.$$

1. Université de Rennes I, felix.ulmer@univ-rennes1.fr

2. Université de Limoges, jacques-arthur.weil@unilim.fr

3. En MAPLE, la commande `with(DEtools);` permet de charger les fonctions d'étude des équations différentielles ordinaires, et en particulier toutes les fonctions d'étude des équations différentielles linéaires que nous allons utiliser ici.

Liouville montre que si f admet une primitive algébrique, alors il existe déjà une primitive $\int f dx$ dans l'extension algébrique $K = \mathbb{C}(x, f)$ définie par l'équation $P(f) = 0$ (c'est à dire que $K = \mathbb{C}(x)[Y]/ < P(Y) >$). Cette primitive algébrique, si elle existe, s'écrit donc de manière unique comme

$$\int f dx = \alpha_0 + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots \alpha_{n-1} f^{n-1} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{C}(x)$$

Notons que la dérivée d'une fonction algébrique f appartient encore à la même extension algébrique K :

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\sum_{i=0}^{n} \phi_i' f^i}{\sum_{i=1}^{n} i \cdot \phi_i f^{i-1}}.$$

En dérivant $\int f dx$ et en imposant $(\int f dx)' - f = 0$, on obtient un système différentiel d'ordre un pour les α_i. Dans notre exemple on obtient l'égalité

$$\left(4 \frac{\alpha_1}{(x-1)^4} + \frac{3}{4} \frac{(5x-12)\alpha_3}{(x-1)(x-2)} + \alpha_3{}'\right) f^3 + \left(\frac{1}{2} \frac{(5x-12)\alpha_2}{(x-1)(x-2)} + \alpha_2{}'\right) f^2$$
$$+ \left(-1 + \alpha_1' + \frac{5}{4} \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{3}{64} \frac{(x-1)^2 \alpha_3}{x-2}\right) f + \alpha_0{}' + \frac{1}{32} \frac{(x-1)^2 \alpha_2}{x-2} = 0$$

qui se traduit par le système linéaire suivant

$$(\mathcal{S}) \ : \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_0' & = & -\frac{(x-1)^2}{32\,(x-2)}\alpha_2(x) \\ \alpha_1' & = & -\frac{5}{4}\,\frac{1}{x-1}\alpha_1(x) - \frac{3}{64}\,\frac{(x-1)^2}{x-2}\alpha_3(x) + 1 \\ \alpha_2' & = & -\frac{(5\,x-12)}{2\,(x-1)\,(x-2)}\alpha_2(x) \\ \alpha_3' & = & -4\,\frac{1}{(x-1)^4}\alpha_1(x) - \frac{3}{4}\,\frac{(5\,x-12)}{(x-1)\,(x-2)}\alpha_3(x) \end{array} \right.$$

Nous verrons dans la partie *1.3.2* que ce système admet la solution suivante dans $\mathbb{C}(x)^4$:
$\alpha_1(x) = \frac{4}{315}\,\frac{-102\,x^2+147\,x+48+35\,x^3}{(x-1)^2}$, $\alpha_3(x) = -\frac{64}{315}\,\frac{(x-2)\left(5\,x^2+6\,x-139\right)}{(x-1)^5}$, $\alpha_2(x) = 0$ et $\alpha_0(x) = c$ où $c \in \mathbb{C}$ est une constante. On en déduit :

$$\int f dx = \frac{4}{315}\,\frac{\left(-102\,x^2+147\,x+48+35\,x^3\right)}{(x-1)^2} f - \frac{64}{315}\,\frac{(x-2)\left(5\,x^2+6\,x-139\right)}{(x-1)^5} f^3 + c$$

C'est à dire

$$\int f dx = \frac{\left(-5\,x^2 - 6\,x + 139 + \sqrt{x-1}\left(35\,x^2 - 62\,x + 91\right)\right)\sqrt{-1+\sqrt{x-1}}}{315\,\sqrt{x-2}}.$$

La méthode de Liouville consiste donc à se ramener au problème (plus simple) du calcul des solutions rationnelles d'un système différentiel linéaire.

Dans ce chapitre, on verra comment calculer de telles solutions, puis on montrera que le problème plus général de la résolution d'une équation différentielle linéaire $L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0$ (où $a_i \in \mathbb{C}(x)$) se ramène également au calcul de solutions rationnelles de systèmes linéaires.

Liouville dans ses deux mémoires s'intéresse déjà au problème de calculer les solutions algébriques de $L(y) = 0$. Il note que le problème majeur est de borner le degré algébrique d'une solution éventuelle. En 1872, H. Schwarz détermine pour quelles valeurs des paramètres a, b, c l'équation hypergéométrique

$$H_{a,b,c}(y) \;=\; x(x-1)\, y^{(2)} + \{c - (1+a+b)x\}\, y' - ab\, y \;=\; 0$$

possède une solution algébrique. Dans un premier mémoire de 1862 (rectifié en 1881) P. Pépin montre comment calculer les solutions algébriques d'une équation différentielle du second ordre. Ce problème est repris par F. Klein puis L. Fuchs (1875) qui utilisent les groupes linéaires et leurs invariants. En 1878, C. Jordan dans son *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques* (J. für Math. 49) s'attaque à la résolution des équations d'ordre 3. Bien qu'il ne parvienne pas à un algorithme, ses idées sont la base des algorithmes modernes ; on pourra consulter [**?**, Mar98, Gra86, Poo60, Sin99] pour plus de détails historiques.
Le problème sombre dans l'oubli (les calculs sont infaisables à la main) puis resurgit avec l'apparition des ordinateurs et du calcul formel. En 1979, J. Kovacic donne un algorithme pour la résolution des équations du second ordre et, en 1981, M.F. Singer donne un algorithme pour l'ordre n. Depuis, beaucoup d'améliorations ont été apportées à ces premiers algorithmes, permettant de les mettre effectivement en oeuvre avec un système de calcul formel. Des références générales pour ces méthodes, que nous allons décrire maintenant, sont [Sin99, vdP98, Beu92] et références incluses.

1.1.2 *Solutions d'équations différentielles linéaires*

Dans ce qui suit, on considère un corps k (de caractéristique 0) muni d'une dérivation ∂ (le lecteur pourra penser à $k = \mathbb{C}(x)$ et $\partial = d/dx$). L'ensemble $C = \{a \in k \,|\, \partial(a) = 0\}$ des constantes de k est un sous-corps de k que nous supposerons algébriquement clos (en général, $C = \mathbb{C}$ ou $C = \overline{\mathbb{Q}}$). Le but de ce chapître est de montrer quelques méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires homogènes ordinaires

$$L(y) \quad = \quad y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1 y' - a_0 y = 0 \qquad (a_i \in k).$$

L'espace des solutions d'une telle équation est un espace vectoriel sur C de dimension au plus n ([Inc26, Poo60]). Pour "résoudre" une telle équation, nous chercherons donc à construire n fonctions linéairement indépendantes sur C

qui satisfont $L(y)=0$. Similairement, pour résoudre une équation $L(y)=b$, il suffira d'en construire une solution particulière, puis de lui adjoindre une base (un *système fondamental*) de solutions de $L(y)=0$.

Pour poursuivre avec notre exemple "fil rouge" de l'intégration d'une fonction algébrique, montrons d'abord que la résolution des équations est équivalente à la résolution des systèmes.

1.2 Systèmes et équations

1.2.1 *Système compagnon associé à une équation donnée*

À l'équation différentielle linéaire non homogène $L(y)=b,\ b\in k$ on peut associer le système *compagnon* suivant

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Aux solutions du système correspondent des solutions de l'équation scalaire et inversement. Il est cependant également possible de faire correspondre une équation scalaire $L(y)=b$ à un système donné $Y'=AY+B$, où $A\in\mathcal{M}_n(k)$, $B\in k^n$.

Exemple: Dans le système de l'exemple $(\mathcal{S})$, si on pose $z=\alpha_0+\alpha_3$ et que l'on dérive (en tenant compte des relations satisfaites par les α_i), on constate que les dérivées $z^{(i)}$ sont des combinaisons linéaires des quatre fonctions inconnues α_j $(j=0,\ldots,3)$: $z^{(4)}$ doit donc être linéairement dépendante de $z,\ldots,z^{(3)}$. En fait, on trouve que z satisfait l'équation $\mathcal{L}(z)=b$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z) &= \tfrac{45}{32}\,\frac{\left(146965\,x^4-1342369\,x^3+4634709\,x^2-7115419\,x+4081618\right)}{(x-2)\,(x-1)^3\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}\,z' \\ &\quad+\tfrac{5}{16}\,\frac{(927095\,x^4-8377567\,x^3+28568871\,x^2-43330157\,x+24580270)}{(x-2)\,(x-1)^2\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}\,z'' \\ &\quad+\frac{160225\,x^4-1425785\,x^3+4781433\,x^2-7135291\,x+3988058}{2\,(x-2)\,(x-1)(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586}\,z'''+z^{(4)}, \\ b &= -6\,\frac{-90555\,x^3+284742\,x^2-412627\,x+11050\,x^4+230430}{\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)(x-1)^6\,(x-2)} \end{aligned}$$

À chaque solution z de cette équation, on associe alors la solution suivante du système $(\mathcal{S})$:

$$
(\alpha): \left\{ \begin{array}{rcl}
\alpha_0(x) & = & z - 8\,\frac{\left(275\,x^2-1213\,x+1322\right)(x-1)\,(x-2)}{5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586}z' - \frac{16}{3}\,\frac{\left(375\,x^2-1633\,x+1762\right)(-1+x)^2\,(x-2)}{\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}z'' \\
& & -\frac{128}{3}\,\frac{(5\,x-11)\,(x-1)^3\,(x-2)^2}{5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586}z^{(3)} + \frac{64}{3}\,\frac{x(-611\,x+145\,x^2+658}{\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)(x-1)^2} \\
\alpha_1(x) & = & -\frac{\left(-9219\,x^2+22284\,x+1235\,x^3-17564\right)(x-1)^4}{2\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}z' - \frac{\left(-13749\,x^2+32644\,x+1885\,x^3-25364\right)(x-1)^5}{3\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}z'' \\
& & -\frac{4}{3}\,\frac{\left(65\,x^2-323\,x+390\right)(x-2)\,(x-1)^6}{5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586}z^{(3)} + \frac{4}{3}\,\frac{(x-1)\left(1495\,x^3-10197\,x^2+23166\,x-17536\right)}{5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586} \\
\alpha_2(x) & = & -32\,\frac{\left(11305\,x^3-75012\,x^2+167229\,x-124642\right)(x-2)}{(x-1)^2\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}z' - \frac{256}{3}\,\frac{\left(-12123\,x^2+26287\,x+1870\,x^3-19034\right)(x-2)}{(x-1)\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}z'' \\
& & -\frac{512}{3}\,\frac{\left(85\,x^2-367\,x+402\right)(x-2)^2}{5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586}z^{(3)} + \frac{2048}{3}\,\frac{(x-2)\left(170\,x^3-1047\,x^2+2175\,x-1538\right)}{\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)(x-1)^5} \\
\alpha_3(x) & = & 8\,\frac{\left(275\,x^2-1213\,x+1322\right)(x-1)\,(x-2)}{5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586}z' + \frac{16}{3}\,\frac{\left(375\,x^2-1633\,x+1762\right)(-1+x)^2\,(x-2)}{\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)}z'' \\
& & +\frac{128}{3}\,\frac{(5\,x-11)\,(x-1)^3\,(x-2)^2}{5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586}z^{(3)} - \frac{64}{3}\,\frac{x(-611\,x+145\,x^2+658}{\left(5525\,x^3-37260\,x^2+84801\,x-64586\right)(x-1)^2}
\end{array} \right.
$$

La résolution du système se ramène donc à la résolution de l'équation $\mathcal{L}(z) = b$ et les relations ci-dessus montrent la bijection entre les solutions du système et les solutions de l'équation $\mathcal{L}(z) = b$. Ce procédé est systématique, comme on va le voir maintenant.

1.2.2 *Systèmes équivalents*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ et $B \in k^n$. Pour trouver une équation scalaire $L(y) = b$ dont les solutions correspondent bijectivement à celles du système $Y' = AY + B$, on cherche à le transformer en un *système compagnon* de la forme donnée plus haut. Pour cela on procède à un “changement de base affine” $Z = PY + \beta$ (avec $P \in GL_n(k)$, $\beta \in k^n$) ; un tel changement de base est souvent appelé une *transformation de Jauge.* Alors,

$$Z' = PY' + P'Y + \beta' = \big((PAP^{-1} + P'P^{-1})\big)Z + (PB + \beta')\,. \tag{1.1}$$

On dit que deux systèmes $Y' = AY + B$ et $Z' = \tilde{A}Z + \tilde{B}$ sont *équivalents* ou *du même type* s'il existe une matrice de passage $P \in GL_n(k)$ et $\beta \in k^n$ tels que $\tilde{A} = PAP^{-1} + P'P^{-1}$ et $\tilde{B} = (PB + \beta')$. Dans ce cas on peut passer (bijectivement) d'un ensemble solution à l'autre par la relation $Z = PY + \beta$.

1.2.3 *Transformation de systèmes en équations : le vecteur cyclique*

Trouver une équation scalaire ”équivalente” à un système donné, c'est donc trouver une transformation de Jauge qui transforme le système de départ en un système compagnon équivalent. Pour cela on considère une solution quelconque $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$ de $Y' = AY + B$ et on pose $z_1 = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$. À présent, on calcule successivement les dérivés $z_2 = z_1', \ldots, z_{n+1} = z_1^{(n)}$ en utilisant la relation $Y' = AY + B$. On obtient ainsi $n + 1$ relations entre les n variables y_i. Les z_i doivent donc être linéairement dépendants sur k, ce qui donne une

équation différentielle linéaire non homogène $\mathcal{L}(z_1) = \sum_{i=0}^{n} b_i z_1^{(i)} = b$. Pour $Z = (z_1, \cdots, z_n)^t$, on a maintenant $Z = PY + \beta$ et $Z' = \tilde{A}Z + \tilde{B}$.
Si la matrice P est inversible, alors, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ est appelé un *vecteur cyclique* pour le système.
Dans l'exemple de la section précédente, nous avons pris le vecteur $[1, 0, 0, 1]$ qui s'est avéré être un vecteur cyclique, mais le lecteur curieux pourra vérifier que (par exemple) $(1, 0, 0, 0)^t$ et $(0, 1, 0, 0)^t$ ne sont pas cycliques.
Comme $z_2 = z_1', \ldots, z_{n+1} = z_1^{(n)}$, le système en Z est bien un sytème compagnon correspondant à une équation scalaire $\mathcal{L}(z_1) = \sum_{i=0}^{n} b_i z_1^{(i)} = b$. On peut montrer ([Ram85]) que presque tous les choix de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ donnent un vecteur cyclique, donc que l'on peut choisir un tel vecteur "au hasard" en général et obtenir le résultat désiré.

L'intérêt de cette transformation est qu'un certain nombre d'algorithmes décrits ci-après sont relativement simples pour les équations scalaires et significativement plus compliqués pour les systèmes. Néammoins, dans l'exemple donné plus haut, on note que l'équation produite a de "gros" coefficients. Pour éviter ce problème, des travaux récents ([Bar99] et références incluses, ou [BJ00]) ont permis de construire des algorithmes plus sophistiqués pour traiter les systèmes directement, sans les transformer en équation.

1.3 Solutions rationnelles

On appelle solution *rationnelle* d'une équation différentielle une solution dans le corps k de ses coefficients, c'est à dire ici dans $C(x)$ (ici, $C = \mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}, \ldots$). Nous allons maintenant montrer comment déterminer une base des solutions rationnelles de l'équation homogène $L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = 0$ avec $a_i(x) \in C(x)$.

1.3.1 *Solutions rationnelles d'équations homogènes*

Les solutions rationnelles sont des fractions rationnelles $\frac{p(x)}{d(x)}$. Pour les calculer on cherche d'abord à déterminer le dénominateur $d(x)$. Pour trouver les zéros possibles de $d(x)$, reprenons les méthodes locales du chapitre [BJ00]. On écrit $L(y)$, dans l'équation $L(y) = 0$, sous la forme

$$L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)}, \qquad a_i(x) \in C[x]$$

Seuls les zéros c_i du coefficient de tête $a_n(x)$ (les points *singuliers* finis de l'équation) peuvent être des zéros de $d(x)$. On peut donc écrire

$$\frac{p(x)}{d(x)} = \frac{p(x)}{\prod_{i=1}^{s} (x - c_i)^{-\lambda_i}} = p(x) \prod_{i=1}^{s} (x - c_i)^{\lambda_i}$$

avec $c_i \in C$ zéros de $p_n(x)$ et $0 \geq \lambda_i \in \mathbb{N}$. Pour trouver les exposants possibles λ en $c = c_i$, rappelons (voir chapitre [BJ00]) que l'on considère un développement en série de Laurent en c

$$\frac{p(x)}{d(x)} = b_0(x-c)^\lambda + b_1(x-c)^{\lambda+1} + \ldots \qquad \text{et} \qquad a_i(x) = a_{i,0}(x-c)^{\beta_i} + a_{i,1}(x-c)^{\beta_i+1} + \ldots$$

Comme les $a_i(x)$ sont des polynômes, on a $\beta_i \geq 0$. On injecte la série dans $L(y) = 0$, ce qui donne :

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(i-1))b_0 a_{i,0}(x-c)^{\lambda+\beta_i-i} + \ldots\right) = 0$$

le coefficient du terme de plus bas degré $\gamma = min\{\lambda + \beta_i - i\}$ doit être nul. Cela donne une équation

$$ind_c(\lambda) = \sum_{\{i|\lambda+\beta_i-i=\gamma\}} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(i-1))a_{i,0} = 0$$

en λ de degré au plus n que l'on appelle *l'équation indicielle*. Il y a donc au plus n possibles *exposants* λ_i en chaque singularité $c_i \in C$. Pour que la solution soit rationnelle, il faut que, en chaque c_i, au moins une des racines de $ind_{c_i}(\lambda) = 0$ soit un entier, sinon il n'y aura pas de solutions rationnelles.

Au lieu d'essayer toutes les possibilités, on prend pour λ_i la plus petite des solutions entières (négative, généralement) de $ind_{c_i}(\lambda) = 0$ ou 0. Notre solution rationnelle aura la forme

$$\frac{p(x)}{d(x)} = \frac{p(x)}{\prod_{j=1}^{s}(x-c_i)^{-\lambda_i}} = p(x)\prod_{j=1}^{s}(x-c_i)^{c_i}$$

et le dénominateur est connu (on a peut-être multiplié le numérateur par un facteur inutile pour faire cette opération).

On injecte à nouveau cette expression dans $L(y) = 0$ et on obtient une nouvelle équation différentielle linéaire pour le polynôme $p(x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}(p(x)) &= L\left(p(x)\prod_{j=1}^{s}(x-c_j)^{\lambda_j}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\left(\frac{p(x)}{\prod_{j=1}^{s}(x-c_j)^{-\lambda_j}}\right)^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \tilde{a}_i(x)\,(p(x))^{(i)}\end{aligned}$$

On calcule alors un développement des coefficients de $\tilde{\mathcal{L}}$ en série de Laurent:

$$\tilde{a}_i(x) = a_{i,\infty,0}(x-c)^{\beta_i} + \mathcal{O}\left((x-c)^{\beta_i-1}\right)$$

que l'on injecte dans la relation $\tilde{\mathcal{L}}(y) = 0$. Comme on veut que $\tilde{\mathcal{L}}(p(x)) = 0$, son coefficient de plus haut degré doit en particulier s'annuller ce qui nous donne comme précédemment

$$ind_\infty(\lambda) = \sum_{\{i|\lambda+\beta_i-i=\gamma\}} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(i-1))b_{i,\infty,0} = 0.$$

Les degrés possibles étant les racines entières positives de cette équation, il y a au plus n possibilités. Au lieu de les considérer toutes, on considère encore la plus grande racine entière positive N. On cherche donc un polynôme $p(x) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i x^i$.

La relation $\tilde{\mathcal{L}}(\sum_{i=0}^{N} \gamma_i x^i) = 0$ se traduit alors en un système linéaire homogène pour les $N+1$ inconnues γ_i. Résolvant ce système, on obtient une base $\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}$ des solutions polynomiales de $\tilde{\mathcal{L}}(y) = 0$, et cela nous donne finalement une base des solutions rationnelles de l'équation de départ $L(y) = 0$ sous la forme:

$$\{\frac{p_1(x)}{\prod_{i=1}^{s}(x-c_i)^{-\lambda_i}}, \ldots, \frac{p_m(x)}{\prod_{i=1}^{s}(x-c_i)^{-\lambda_i}}\}$$

Les exposants utilisés dans le calcul correspondent aux exposants des solutions locales en un point singulier $c_i \in C$ (et à l'infini pour le degré de $p(x)$).

En utilisant les méthodes qui permettent de calculer directement les exposants pour des systèmes différentiels (voir le chapitre [BJ00]), on peut construire des algorithmes pour calculer directement les solutions rationnelles de systèmes linéaires $Y' = AY$ ([Bar99] et références) sans les convertir préalablement en équations.

1.3.2 *Équations non homogènes et solution de l'exemple "fil rouge"*

Cette méthode peut aussi être adaptée au calcul de solutions rationnelles d'équations $\mathcal{L}(y) = b$ non homogènes ([Bro92] et références) mais nous allons utiliser ici une astuce pour simplifier l'exposition : l'étude d'une équation non homogène peut toujours se ramener à celle d'une équation homogène (éventuellement d'ordre plus élevé) en considérant l'équation $L(y) = b\,(\mathcal{L}(y))' - b'\mathcal{L}(y) = 0$.

Reprenons notre exemple fil rouge. Nous avions obtenu une équation $\mathcal{L}(y) = b$. Pour nous ramener à une équation homogène, nous considérons donc l'équation $L(y) = b\,(\mathcal{L}(y))' - b'\mathcal{L}(y) = 0$:

$$\begin{aligned} L(y) \quad &= \tfrac{45}{16}\,\frac{440895\,x^5+19124660\,x^3-41917722\,x^2+47163053\,x-4528916\,x^4-21498482}{(x-2)\left(-90555\,x^3+284742\,x^2-412627\,x+11050\,x^4+230430\right)(x-1)^4}\,y' \\ &+ \tfrac{5}{32}\,\frac{17478890\,x^5-180447867\,x^4+761665199\,x^3-1654880375\,x^2+1838740539\,x-827751650}{(x-1)^3\,(x-2)\left(-90555\,x^3+284742\,x^2-412627\,x+11050\,x^4+230430\right)}\,y'' \\ &+ \frac{22088950\,x^5-228088635\,x^4+958764595\,x^3-2062761247\,x^2+2264278659\,x-1007458642}{16\,(x-1)^2\,(x-2)\left(-90555\,x^3+284742\,x^2-412627\,x+11050\,x^4+230430\right)}\,y^{(3)} \\ &+ \frac{453050\,x^5-4656315\,x^4+19428215\,x^3-41370911\,x^2+44911683\,x-19779482}{2\,(x-1)\,(x-2)\left(-90555\,x^3+284742\,x^2-412627\,x+11050\,x^4+230430\right)}\,y^{(4)} + y^{(5)} = 0 \end{aligned}$$

On notera que, au fur et à mesure que nous avançons dans ce chapitre, les coefficients de nos équations donnent l'impression d'être de plus en plus épouvantables. Mais ils restent très simples à traiter par des ordinateurs.

Les singularités (finies) sont les points $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, et les racines c_i $(i > 2)$ de l'équation irréductible $\frac{142371}{5525}\,x^2 + x^4 - \frac{412627}{11050}\,x - \frac{18111}{2210}\,x^3 + \frac{23043}{1105} = 0$ (on ne calculera pas ces racines, mais on les manipulera comme des nombres algébriques *définis* par cette équation).

En calculant les exposants comme indiqué dans le texte (par exemple avec la fonction `genexp` de MAPLE), on trouve les exposants $(0,1,2,3,\frac{3}{2})$ en $x=2$, $(-5,-2,0,-\frac{1}{2},-\frac{9}{2})$ en $x=1$, et $(0,1,2,3,5)$ en les c_i (pour $i > 2$). On en déduit qu'un candidat pour une solution rationnelle sera nécessairement de la forme $p(x)(x-2)^0(x-1)^{-5}\prod_{i>2}(x-c_i)^0$, ou encore $\frac{p(x)}{(x-1)^5}$.

En posant $p(x) = x^N(c_N + \mathcal{O}(\frac{1}{x}))$ dans la relation $L(\frac{p(x)}{(x-1)^5}) = 0$, on obtient $11050\,(N-3)\,(4\,N-5)\,(N-5)\,(4\,N-3)\,(2\,N-9)$ comme coefficient du terme de plus haut degré ; on en déduit que $N \in \{3,5\}$. On cherche donc $p(x)$ sous la forme $p(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 x^4 + \gamma_5 x^5$.

Le fait que ce $p(x)$ soit solution de l'équation différentielle se traduit par le système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1125 & -900 & 53959 & 267545 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 22732650 & 51866405 & 239145235 & 493746279 & 463316707 & -466026280 \\ 11443680 & 16808410 & -44942425 & -164608566 & -313297728 & -442425600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 61880 & 3442015 & 4622388 & -39011582 & -207171040 \\ 1868670 & 13070140 & 162697775 & 420978396 & 691480368 & 811113600 \\ -3729375 & -8503865 & -47608495 & -87550269 & 34987468 & 613145030 \\ -56964465 & -140390815 & -733512410 & -1659388287 & -2308356996 & -1638036600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} = 0$$

d'où l'on déduit les solutions rationnelles de notre équation :

$$y = \frac{\left(-\frac{139}{2} - \frac{5}{4}\,x^3 + \frac{151}{4}\,x + x^2\right)}{(x-1)^5}\gamma_2 + \frac{-696 - \frac{5}{2}\,x^3 + \frac{765}{2}\,x - 5\,x^4 + x^5}{(x-1)^5}\gamma_5.$$

où γ_2 et γ_5 sont des constantes arbitraires.

On remarque que la solution évidente $y = 1$ est contenue dans cette forme générale (prendre $\gamma_5 = 1$ et $\gamma_2 = -10$).

Pour notre problème initial, il faut déterminer quelles valeurs des constantes donnent bien une solution de notre équation non homogène de départ. Injectant y dans notre équation non homogène, nous trouvons finalement comme solution rationnelle $z = c - \frac{64}{315}\,\frac{(x-2)\left(5\,x^2+6\,x-139\right)}{(x-1)^5}$ (où c désigne une constante arbitraire). Réinjectant cette solution dans les relations (α) page 7, nous obtenons bien la solution rationnelle correspondante du système ($\mathcal{S}$) et la primitive annoncée dans l'introduction page 4.

1.4 Factorisation et réduction de l'ordre d'une équation

D'un point de vue algébrique, une manière de simplifier la résolution de $L(y) = 0$ est d'essayer de trouver une décomposition de la forme $L(y) = L_1(L_2(y))$. Les solutions de $L_2(y) = 0$ sont alors aussi des solutions de $L(y) = 0$ et on a ainsi réduit l'ordre de l'équation à résoudre. Cette décomposition est une *factorisation* d'opérateurs différentiels.

1.4.1 *Opérateurs différentiels*

Pour voir cela on écrit $L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)}$ sous forme d'opérateur différentiel:

$$L(y) = (a_n(x)D^n + \ldots + a_1(x)D + a_0(x))\,(y)$$

où le symbole D représente $\frac{d}{dx}$. Pour munir les opérateurs différentiels d'une structure d'anneau (de polynômes non commutatifs, ou "polynômes de Ore"), on note que

$$(Dx)(y) = \frac{d}{dx}(xy) = x\frac{d}{dx}(y) + y = (xD+1)\,(y)$$

À l'aide de cette règle $Dx = xD + 1$, on peut montrer que l'ensemble des *polynômes* $p(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) D^i$ forme un anneau non commutatif, noté $\mathcal{D}$, dans lequel l'addition est l'addition usuelle des polynômes et la multiplication est définie par $Dx = xD + 1$ et par la distributivité (cette multiplication correspond à la composition des opérateurs différentiels).

Dans notre exemple "fil rouge", on remarque que D est un facteur à droite de notre opérateur L (il n'y a pas de terme en z donc on a $L(z) = L_1(D(z)) = L_1(z')$. En utilisant un algorithme de factorisation (par exemple, la commande `DFactor` de MAPLE), on a une factorisation "complète" de L sous la forme:

$$L = (D+f_1)\,(D+f_2)\,L_{2,1}\,D, \qquad \text{avec} \qquad f_1, f_2 \in \mathbb{C}(x)$$

où [4]

$$\begin{aligned} L_{2,1} \quad &= \quad D^2 + \frac{\left(-12123\,x^2 + 1870\,x^3 + 26287\,x - 19034\right)}{2\,(85\,x^2 - 367\,x + 402)\,(x-2)\,(x-1)} D \\ &\qquad + \frac{3}{16}\,\frac{11305\,x^3 - 75012\,x^2 + 167229\,x - 124642}{(x-2)\,(x-1)^2\,(85\,x^2 - 367\,x + 402)} \end{aligned}$$

4. Les expressions complètes de f_1 etf_2 sont un peu lourdes et de peu d'intérêt pour notre texte

Ici, on note que D est un facteur à droite de L, et que l'on a à la fois $L(1) = 0$ et $D(1) = 0$. Plus généralement, si $L = M.N$ et si $N(y) = 0$ alors $L(y) = M(N(y)) = M(0) = 0$. Mais, on a aussi une réciproque : si N est un opérateur irréductible de degré (en D) inférieur à celui de L et s'il existe y tel que $L(y) = N(y) = 0$, alors N est un facteur à droite de L (cela tient au fait que $\mathcal{D}$ est un anneau *euclidien* à gauche et à droite et qu'un opérateur non nul d'ordre n possède au plus n solutions linéairement indépendantes).
Comme L peut admettre beaucoup de sortes de solutions, cela indique que L pourrait admettre plusieurs factorisations différentes. Par exemple, dans notre exemple, on observe beaucoup d'autres factorisations (que l'on peut calculer avec la méthode de [Sin96, vH96]), commande `eigenring` en MAPLE), par exemple:

$$\begin{aligned} L &= (D+\tilde{f}_1)\,(D+\tilde{f}_2)\,(D+\tilde{f}_3) \\ & \left(D^2+\frac{3}{2}\,\frac{(6\,x-13)\,D}{x^2-3\,x+2}+\frac{3}{16}\,\frac{85\,x^2-367\,x+402}{(x^2-3\,x+2)^2}\right), \qquad \text{avec } \tilde{f}_i \in k \end{aligned}$$

On peut montrer (et on le vérifie sur nos exemples) que le nombre et l'ordre (le degré en D) des facteurs est unique à permutation des facteurs près[5]. Mais il peut y avoir une infinité de factorisations différentes :
dans la partie *1.3.2*, nous avions trouvé une base de solutions rationnelles

$$y = \frac{\left(-\frac{139}{2}-\frac{5}{4}\,x^3+\frac{151}{4}\,x+x^2\right)}{(x-1)^5}\gamma_2+\frac{-696-\frac{5}{2}\,x^3+\frac{765}{2}\,x-5\,x^4+x^5}{(x-1)^5}\gamma_5$$

Si on note $f = \frac{y'}{y}$ la dérivée logarithmique d'une telle solution, alors $D - f$ est un facteur à droite de L car $(D - f)(y) = 0$. Mais on voit que f dépend de deux paramètres et que l'on a donc une infinité de facteurs à droite, qui sont de la forme

$$D - \frac{\left(3\,x^2+10\,x^3+1239-612\,x\right)\,(\gamma_2+10\,\gamma_5)}{\left(\left(-2784-10\,x^3+1530\,x-20\,x^4+4\,x^5\right)\gamma_5-(x-2)\left(5\,x^2+6\,x-139\right)\gamma_2\right)(x-1)}.$$

1.4.2 *Solutions exponentielles*

On peut donner un aperçu des méthodes utilisées pour factoriser en montrant comment calculer des facteurs d'ordre 1 (le calcul de facteurs d'ordre supérieur s'y ramène, voir [Sin99] pour plus de détails et des références). On a un facteur de la forme $D - f$, avec $f \in k$, si et seulement si l'équation $L(y) = 0$ admet une solution y telle que $y' = fy$. Comme un tel y est une exponentielle

5. C'est une conséquence du théorème de Jordan-Hölder pour les $\mathcal{D}$-modules.

(de l'intégrale de f), on dira que y est une solution *exponentielle* de l'équation $L(y)=0$. Nous verrons une autre utilité de ces solutions dans la partie 1.5. L'algorithme de calcul de telles solutions est similaire (en plus laborieux) à l'algorithme de calcul des solutions rationnelles.

Pour notre équation "fil rouge" $L(y)=0$, on peut montrer ([Sin81, Sin99], car notre équation est fuchsienne) que toute solution exponentielle sera de la forme $y=\prod_{j=1}^{s}(x-c_j)^{\lambda_j}p(x)$, où p est un polynôme, les c_j sont les singularités, et les λ_j sont des exposants (plus nécessairement entiers, contrairement aux solutions rationnelles) en les singularités c_j. Pour chaque combinaison des λ_j, on pose $y=\prod_{j=1}^{s}(x-c_j)^{\lambda_j}z$, on calcule l'équation différentielle vérifiée par z, et on cherche d'éventuelles solutions polynomiales : c'est donc similaire au calcul des solutions rationnelles, mais c'est plus couteux car il faut tester beaucoup de combinaisons des λ_j.

Dans la partie *1.3.2*, nous avions déja trouvé deux solutions rationnelles à $L(y)=0$. En étudiant les exposants aux singularités que nous avions calculés, nous voyons qu'il y a trois types de solutions exponentielles possibles :

$$\frac{1}{(x-1)^5}p_1(x),\ \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}p_2(x),\ \frac{(x-2)^{\frac{5}{2}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}p_3(x).$$

Nous avions trouvé deux possibilités pour le polynôme p_1 ce qui nous avait fourni un espace vectoriel de dimension 2 de solutions rationnelles. Pour la troisième forme, le calcul montre qu'il n'y a pas de polynôme p_3 qui convienne. Pour la deuxième forme, le calcul montre que $p_2=1$ est le seul polynôme solution (à multiplication par une constante près), ce qui nous fournit la solution exponentielle $y_3=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ et le facteur à droite suivant pour L : $D+\frac{1}{2\,(x-1)}$. On peut retrouver ce résultat en utilisant la commande `expsols` de MAPLE.

1.5 Solutions liouvilliennes

Notre équation "fil rouge" $L(y)=0$ est d'ordre cinq ; nous savons qu'il nous faut trouver cinq solutions linéairement indépendantes sur C pour obtenir une base des solutions. Nous avons déjà trouvé deux solutions rationnelles et une solution exponentielle. Pour les deux solutions restantes, il nous faudra donc chercher dans une classe plus vaste de solutions.

Pour ce faire, nous allons chercher à "calculer" les solutions du facteur à droite d'ordre 2 que nous avions calculé dans la deuxième factorisation de L, c'est à dire :

$$L_2(y)=y''(x)+\frac{3}{2}\,\frac{(6\,x-13)}{(x-2)\,(x-1)}y'(x)+\frac{3}{16}\,\frac{\left(85\,x^2-367\,x+402\right)}{(x-2)^2\,(x-1)^2}y(x)$$

Comme le facteur est irréductible, il n'admet pas de solutions rationnelles ou exponentielles. Nous allons nous demander maintenant s'il existe des solutions que l'on peut "écrire" à l'aide des symboles suivants: intégrations successives, extensions algébriques, exponentiations, compositions, et $+, \times, -, /$ (par exemple, toutes les fonctions "obtenues par quadratures"). De telles solutions s'appellent des *solutions liouvilliennes.*

Définition 1 *On dit qu'une fonction est* liouvillienne *sur k si elle appartient à un corps $k(t_1, \ldots, t_n)$ avec :*
Pour $i = 1, \ldots, n$, il existe $a_i \in k(t_1, \ldots, t_{i-1})$ tel que

$$\begin{cases} t_i \text{ algébrique} & (t_i \text{ est racine d'un polynôme à coefficients dans } k(t_1, \ldots, t_{i-1})), \\ \textit{ou}\ \ t_i' = a_i & (t_i = \int a_i,\ \textit{extension par une intégrale}), \\ \textit{ou}\ \ t_i' = a_i t_i & (t_i = e^{\int a_i},\ \textit{extension par l'exponentielle d'une intégrale}) \end{cases}$$

Par exemple,

$$\sqrt{x}\frac{\exp(\int(\sqrt{x+1}))}{\int \exp(x^2)}$$

est liouvillienne.

1.5.1 *Construction d'algorithmes et théorie de Galois différentielle*

Pour construire des algorithmes de calcul de solutions liouvilliennes, on utilise la *théorie de Galois différentielle.* Cette théorie est similaire à la théorie de Galois classique des équations polynômiales, créée initialement pour décider si les racines d'un polynôme s'expriment à l'aide de racines m-ièmes (c'est à dire de symboles du type $\sqrt[m]{.}$).
Tout comme en théorie de Galois classique il est possible de montrer l'existence d'un "corps de décomposition", c'est à dire pour nous d'une extension *différentielle* de corps K de k (sur laquelle notre dérivation s'étend) minimale contenant un système fondamental de solutions $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de l'équation $L(y) = 0$. Il existe en fait un tel "corps de décomposition" K ayant les mêmes constantes C que k que l'on appelle *extension de Picard-Vessiot.* Dans ce qui suit, nous fixons une fois pour toutes une extension de Picard-Vessiot et appelons *solution* une solution de $L(y) = 0$ dans K.

Exemple: (Intégration) Le calcul d'une primitive de $a \in k$ équivaut à la résolution de $y' = a$. On transforme cette équation non homogène par dérivation en $L_{\int}(y) = y'' - \frac{a'}{a}y'$. Un système fondamental de solution est $\{1, \int a\}$ et l'extension de Picard-Vessiot associée à $L_{\int}(y) = 0$ est $K = k(\int a)$ (d'habitude, il faut aussi rajouter, en plus des solutions, leurs dérivées). $\diamond$

Toujours par analogie à la théorie des polynômes, on va associer à l'extension K/k un groupe permettant de mesurer les propriétés particulières éventuelles des solutions. En théorie de Galois classique on considère le groupe $\mathrm{Aut}(K/k)$

des automorphismes de K qui fixent les éléments de k. En théorie de Galois différentielle il faut aussi tenir compte de la dérivation:

Définition 2 *Le* groupe de Galois différentiel *de (l'extension de Picard-Vessiot K/k associée à) $L(y) = 0$ est*

$$G = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K/k) \,|\, \sigma\partial = \partial\sigma\}$$

Le groupe de Galois différentiel est donc un sous-groupe du groupe de Galois classique. On notera que $\sigma \in G$ envoie une solution sur une solution (car $L(\sigma(y)) = \sigma(L(y)) = \sigma(0) = 0$). Comme toute solution est une combinaison linéaire sur C de $\{y_1, \dots y_n\}$, on en déduit qu'il existe des constantes $c_{i,j} \in C$ telles que $\sigma(y_j) = \sum_{i=1}^n c_{i,j} y_i$. Ceci nous donne une représentation (fidèle) de G comme sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(C)$ des matrices inversibles à coefficients dans C. On notera $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}(n, C)$ cette représentation linéaire de G.
En fait, on peut montrer que $\mathcal{G}$ est un *groupe linéaire algébrique*, c'est à dire que les matrices $(c_{i,j})$, vues comme points dans $\mathcal{C}^{n^2}$, forment une sous-variété algébrique de $GL(n, \mathcal{C})$ (les $(c_{i,j})$ sont les solutions d'un système d'équations polynomiales). Il existe une correspondance de Galois entre les sous-corps différentiels et les sous-groupes algébriques de $\mathcal{G}$.

Exemple: (Intégration, suite) On consière $L_{\int}(y) = y'' - \frac{a'}{a} y'$ de système fondamental $\{1, \int a\}$ dont l'extension de Picard-Vessiot associée est $K = k(\int a)$. Pour $\sigma \in \mathcal{G}$ on a $\sigma(1) = 1$. Comme σ permute avec la dérivation on a:

$$\left(\sigma\left(\int a\right) - \int a\right)' = \sigma(a) - a = 0$$

ce qui montre que $\sigma(\int a) - \int a$ est une constante $c_\sigma \in \mathcal{C}$. Donc $\sigma(\int a) = \int a + c_\sigma$ et la matrice de σ dans la base $\{1, \int a\}$ est $\begin{pmatrix} 1 & c_\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le groupe $\mathcal{G}$ est donc un sous-groupe du groupe dont les “points” $(c_{i,j}) \in \mathcal{C}^4$ sont définis par les relations polynomiales $c_{1,1} = c_{2,2} = 1, c_{2,1} = 0$. Cette variété est isomorphe à $\mathcal{C}$ et donc $\mathcal{G}$ est un sous groupe du groupe additif $(\mathcal{C}, +)$. Comme les sous-variétés non vides (ensemble de zéros communs de polynômes à une variable) de $\mathcal{C}$ sont les ensembles finis et qu'un sous-groupe additif différent de $\{0\}$ contient une infinité d'éléments, les seules possibilités pour $\mathcal{G}$ sont $\{0\}$ (identité) et $\mathcal{C}$. $\diamond$

Le groupe de Galois $\mathcal{G}$ permet de “mesurer” les propriétés algébriques éventuelles des solutions. Par exemple

Proposition 1 *([Sin90, Sin99]) On a les propriétés suivantes:*

1. *Toutes les solutions de $L(y) = 0$ sont dans k si et seulement si $\mathcal{G}$ est le groupe trivial ($\mathcal{G} = \{id\}$).*

2. *Toutes les solutions de* $L(y) = 0$ *sont algébriques sur* k *si et seulement si* $\mathcal{G}$ *est un groupe fini.*
3. $L(y)$ *se factorise non trivialement en* $L_1(L_2(y))$ *si et seulement si* $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}_n(C)$ *est un groupe linéaire réductible (il existe un sous-espace strict* W *non nul de l'espace des solutions tel que* $\forall \sigma \in \mathcal{G}$, $\sigma(W) = W$*).*

On voit que les problèmes de classification des types de solutions sont traduits en des problèmes de classification de groupes.

Exemple: (Intégration, suite) On considère $L_{\int}(y) = y'' - \frac{a'}{a} y'$ dont l'extension de Picard-Vessiot associée est $K = k(\int a)$. Les seules possibilités pour $\mathcal{G}$ sont $\{0\}$ (identité) et $\mathcal{C}$. Comme le groupe de Galois différentiel est un sous-groupe du groupe de Galois classique, on retrouve le théorème de Liouville énoncé dans l'introduction :

Théorème 1 *(Liouville) Pour* $a \in k$*, la primitive* $\int a$ *de* a *est soit transcendante*[6] *sur* k *(*$\mathcal{G} \cong (\mathcal{C}, +)$*), soit dans* k *(*$\mathcal{G}$ *est trivial).*
En particulier, une primitive qui est algébrique sur k *est déjà dans* k*.* ◇

L'existence d'une solution liouvillienne se lit également dans le groupe de Galois différentiel $\mathcal{G}$. Le critère galoisien, dû à Kolchin, pour l'existence d'une base de solutions liouvilliennes est que la composante connexe du groupe algébrique $\mathcal{G}$ contenant l'identité soit résoluble ([Sin90]). De ce théorème, on peut déduire :

Proposition 2 *Soit* $L(y) = 0$ *une équation différentielle linéaire irréductible à coefficients dans le corps* k *admettant une solution liouvillienne sur* k*. Il existe au moins* **une** *solution* z *de* $L(y) = 0$ *tel que* $u = z'/z$ *soit algébrique sur* k*. On a donc* $z = e^{\int u}$ *avec* u *algébrique sur* k*.*

Le lecteur notera que, bien que le groupe de Galois soit un objet dont on ne connait que l'existence, et qu'à ce jour on ne sait pas le calculer en général, les propriétés du groupe de Galois permettent de caractériser la structure spécifique d'**une** solution particulière. Les algorithmes calculant les solutions liouvilliennes visent d'abord à produire le polynôme minimal

$$P(u) = u^m + b_{m-1}u^{m-1} + \ldots + b_1 u + b_0 = 0 \qquad (b_i \in k)$$

qui définit u sur k. Pour une équation irréductible $L(y)$ on obtient alors un système fondamental de solutions de la forme

$$\{e^{\int u_1}, e^{\int u_2}, \ldots, e^{\int u_n}\}$$

6. C'est à dire qu'elle ne vérifie pas d'équation polynomiale à coefficients dans k.

où les u_i sont des zéros de $P(u)$. Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer comment calculer ce polynôme. L'approche ce fait en deux étapes:

1. On borne le degré m de P.
2. On calcule les coefficients de P.

Il s'avère que le degré de P peut être borné indépendamment des coefficients de $L(y) = 0$ en fonction de l'ordre n de $L(y)$ uniquement. Ce résultat s'obtient en classifiant l'ensemble (infini) des groupes de Galois possibles d'une équation différentielle linéaire.

Théorème 2 *(Singer 1981) Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans k.*
Si $L(y) = 0$ admet des solutions liouvilliennes, alors il existe une solution z telle que $u = z'/z$ soit algébrique de degré au plus $\max\{t \cdot f(t), \text{où } t \,\text{divise}\, n\}$ *où f dépend de n et non des coefficients de $L(y) = 0$.*

Il existe plusieurs bornes pour la fonction f. La borne suivante est due a Frobenius et Schur:

$$f(n) \leq \left(\sqrt{8n} + 1\right)^{2n^2} - \left(\sqrt{8n} - 1\right)^{2n^2}$$

Pour des valeurs données de n, une classification fine des sous-groupes de $GL_n(C)$ a permis d'obtenir les bornes suivantes :

1. Pour $n = 2$, il existe un $u = z'/z$ tel que $[k(u) : k] \leq 12$ (voir [Kov86]).
2. Pour $n = 3$, il existe un $u = z'/z$ tel que $[k(u) : k] \leq 36$ (voir [SU93a]).
3. Pour $n = 4$, il existe un $u = z'/z$ tel que $[k(u) : k] \leq 120$ (voir [Cor00]).
4. Pour $n = 5$, il existe un $u = z'/z$ tel que $[k(u) : k] \leq 55$ (voir [Cor00]).

Pour chaque valeur de n, on peut même donner une liste de degrés possibles pour le degré de u (voir par exemple [Kov86, SU93b, vHRUW99]).

Pour calculer les coefficients du polynôme minimal $P(u)$

$$P(u) = u^m + b_{m-1}u^{m-1} + \ldots + b_1 u + b_0 = 0 \qquad (b_i \in k)$$

on note que tous les zéros u_i de $P(u)$ sont des dérivées logarithmiques de solutions z_i de $L(y) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} P(u) &= u^m + b_{m-1}u^{m-1} + \ldots + b_1 u + b_0 \\ &= \prod_{i=1}^{m} \left(u - \frac{z_i'}{z_i}\right) \\ &= u^m - \frac{\left(\prod_{i=1}^{m} z_i\right)'}{\prod_{i=1}^{m} z_i} u^{m-1} + \ldots + \prod_{i=1}^{m} \frac{z_i'}{z_i} \end{aligned}$$

En fait, il suffit de trouver *un* coefficient b_{m-1} et ensuite il est possible d'en déduire les autres b_i ([Kov86, ?, SU97, vHRUW99]). La formule indique que le coefficient b_{m-1} est la dérivée logarithmique d'un produit de m solutions de $L(y)$ et que cette dérivée logarithmique est dans k.
Pour calculer b_{m-1}, nous allons calculer une équation différentielle linéaire, notée $L^{\circledS m}$, dont les solutions sont les produits de m solutions de $L(y)$. Le coefficient b_{m-1} sera alors l'opposé de la dérivée logarithmique d'une solution exponentielle de $L^{\circledS m}$.

Soit $L(y) = y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}$ avec $a_i \in k$. On pose $z = y_1 y_2 \dots y_m$ où les y_i sont des solutions de $L(y) = 0$. À présent, on dérive z pour obtenir des sommes d'expressions de la forme $y_1^{(i_1)} y_2^{(i_2)} \dots y_m^{(i_m)}$. Chaque fois que l'on rencontre une n-ième dérivée de y_j on la remplace par $-\sum_{i=0}^{n-1} a_i y_j^{(i)}$. Ainsi, les $z^{(i)}$ sont égaux à des combinaisons linéaires sur k de termes $y_1^{(i_1)} y_2^{(i_2)} \dots y_m^{(i_m)}$ avec $i_j < n$. En dérivant suffisament on aura donc plus d'équations que de variables, ce qui montre que les $z, z', z'', \dots, z^{(N)}$ seront linéairement dépendant sur k pour un certain N (précisément, on montre que $N \leq \binom{n+m-1}{n-1}$). Si N est minimal, on note $L^{\circledS m}(y) = 0$ l'équation obtenue et on l'appelle la *puissance symétrique" m-ième* de L.

1.5.2 *Solutions liouvilliennes d'équations d'ordre 2*

Dans ce qui suit nous donnons sans preuve une méthode, à notre avis une des plus simples existant à ce jour[7], pour décider si une équation différentielle du second ordre $L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ admet une solution liouvillienne et, si oui, la calculer. A noter qu'après la factorisation on utilise que des solutions rationnelles (et non exponentielles), mais que le polynôme $P(u)$ n'est pas forcement irréductible, mais qu'il suffit de prendre l'un de ses facteurs

7. méthode adaptée de [?, BMW97], voir [Kov86] pour le premier algorithme (commande `kovacicsols` en Maple), [Fak97] pour un raffinement dans l'écriture des solutions, et [vHRUW99, Sin99] pour d'autres références.

irréductible.

1. Factoriser $L(y)$ en calculant une solution exponentielle de $L(y) = 0$. Si une telle factorisation existe, on obtiendra deux solutions liouvilliennes par la méthode de la variation des constantes et l'algorithme s'arrête.

2. Si $L(y)$ n'est pas de la forme $y'' + ry$ (c'est à dire si $a_1 \neq 0$), on fait un changement de variable en remplacant y par $y \cdot e^{\int -\frac{a_1}{2}}$, afin d'obtenir une équation de la forme $y'' + ry$ (avec $r \in k$) que l'on notera de nouveau $L(y)$ dans la suite (les solutions liouvilliennes de l'une correspondent aux solutions liouvilliennes de l'autre).

3. Pour $m \in \{4, 6, 8, 12\}$ (dans cet ordre!) :

   - Calculer $L^{\circledS m}(y)$. Pour cela on définit la suite récurrente d'opérateurs L_i par :

   $$\begin{cases} L_0(y) & = & y, \\ L_1(y) & = & y', \\ L_{i+1}(y) & = & L_i(y)' + i(m-i+1)rL_{i-1}(y). \end{cases}$$

   On a alors $L_{m+1} = L^{\circledS m}$
   - Chercher si $L^{\circledS m}(y) = 0$ admet une solution *rationnelle* $f \in k$
   - Si oui:
     - Poser $b_{m-1} = -\frac{f'}{f}$,
     - Calculer les autres coefficients b_i de P en utilisant la récurrence:

     $$(\sharp_m) \qquad \begin{cases} b_m = 1, \qquad b_{m-1} = -\frac{f'}{f} \\ b_{i-1} = \dfrac{-b_i' + b_{m-1}b_i + r(i+1)b_{i+1}}{m-i+1}, \quad m-1 \geq i \geq 0 \end{cases}$$

     - retourner P

   Sinon, continuer avec le m suivant.

4. Si aucune solution n'est trouvée de cette manière, il n'y a pas de solutions liouvilliennes.

Pour notre exemple fil rouge du début,

$$L_2(y) = y'' + \frac{3}{2}\,\frac{(6\,x-13)}{(x-2)\,(x-1)}y' + \frac{3}{16}\,\frac{85\,x^2 - 367\,x + 402}{(x-2)^2\,(x-1)^2}y$$

la procédure donne

1. $L_2(y)$ est irréductible (c'était un facteur irréductible dans la partie *1.4.1*)

2. $L_2(y)$ n'est pas de la forme $y'' + ry$, on effectue donc le changement de variable en remplacant y par

$$y \cdot e^{\int -\frac{a_1}{2}} = y\,(x-2)^{3/4}\,(x-1)^{-\frac{21}{4}}$$

pour obtenir l'équation

$$L(y) = y'' + \frac{3}{16}\,\frac{x^2 - 3\,x + 3}{(x-2)^2\,(x-1)^2}y$$

3. On calcule $L^{Ⓢ4}(y)$ et on obtient:

$$y^{(5)} + \frac{15}{4}\,\frac{\left(x^2 - 3\,x + 3\right)}{(x-2)^2\,(x-1)^2}y^{(3)} - \frac{45}{8}\,\frac{\left(2\,x^3 - 9\,x^2 + 17\,x - 12\right)}{(x-2)^3\,(x-1)^3}y''$$
$$+\frac{45}{4}\,\frac{2\,x^4 - 12\,x^3 + 33\,x^2 - 45\,x + 24}{(x-2)^4\,(x-1)^4}y' - \frac{45}{4}\,\frac{2\,x^5 - 15\,x^4 + 54\,x^3 - 108\,x^2 + 113\,x - 48}{(x-2)^5\,(x-1)^5}y$$

Il y a un espace de solutions rationnelles de dimension 2 dont une base est:

$$[\,x\,(x-2)\,(x-1),\;(x-2)\,(x-1)\,]$$

en prenant $f = x\,(x-2)\,(x-1)$ la récurrence $(\sharp_m)$ permet de construire le polynôme irréductible suivant:

$$\begin{aligned} P_4 \quad &= \quad u^4 - \frac{\left(2 - 6\,x + 3\,x^2\right)}{x\,(x-2)\,(x-1)}u^3 + \frac{3}{8}\,\frac{\left(9\,x^3 - 35\,x^2 + 43\,x - 16\right)}{(x-1)^2\,(x-2)^2\,x}u^2 \\ &- \frac{27\,x^4 - 153\,x^3 + 319\,x^2 - 288\,x + 94}{16\,x\,(x-2)^3\,(x-1)^3}u + \frac{81\,x^5 - 594\,x^4 + 1723\,x^3 - 2466\,x^2 + 1737\,x - 480}{256\,(x-2)^4\,(x-1)^4\,x} \end{aligned}$$

Plus généralement, pour toutes constantes (c_1, c_2), la récurrence associera un polynôme en u de degré 4 à $c_1\,x\,(x-2)\,(x-1) + c_2(x-2)\,(x-1)$. Pour presque toutes les valeurs des c_i, ce polynôme sera irréductible et définira donc une fonction algébrique de degré 4. Néanmoins, pour trois familles de valeurs de (c_1, c_2), le polynôme obtenu sera le carré ([HvdP95, **?**, **?**]) d'un polynôme de degré 2. Dans notre cas, ces valeurs (que l'on trouve en calculant le discriminant de P par rapport à u) seront

$$\{\,c_1 = 0\},\ \{\,c_2 = -2\,c_1\},\ \{\,c_2 = -4\,c_1\}.$$

Et effectivement, pour $c_1 = 0$, on obtient

$$P = \left(u^2 - \frac{(2\,x-3)\,u}{2\,(x-1)\,(x-2)} + \frac{3\,x^2 - 9\,x + 7}{16\,(x-2)^2\,(x-1)^2}\right)^2$$

Pour inverser le changement de variable fait en (2.) et revenir à une solution de L, on remplace u par $u = v + \frac{3}{4}\frac{6\,x-13}{(x-2)\,(x-1)}$ dans l'équation $P(u) = 0$ et finalement, en intégrant pour calculer $exp(\int v)$, on obtient les deux solutions cherchées qui complètent la résolution de notre équation $L(y) = 0$, c'est à dire

$$y_4 = \frac{\sqrt{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\,(x-2)}{(x-1)^5} \qquad \text{et} \qquad y_5 = \frac{x-2}{\sqrt{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\,(x-1)^5}.$$

On peut généraliser cet algorithme à des équations d'ordre supérieur mais l'explication est plus technique et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article [vHRUW99].

1.6 Conclusion

Nous avons presenté les solutions rationnelles, exponentielles et Liouviliennes. Ce sont la des solutions qui s'expriment à l'aide de solutions d'équations d'ordre un. On peut également chercher à résoudre une équation différentielle à l'aide d'équations d'ordres moindre (refence) ou plus généŕalement de calculer le groupe de Galois différentielle d'une eq́uation (Singer-Compoint, Beukers). Le groupe de Galois différentielle permet d'obtenir toutes rlations diffs entre les solutions. Une application interessante est le lien avec l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens. Enfin nous mentionnons que des résultats similaires existent pour les équations aux différences et aux q-différences ([vdPS97])

Bibliographie

[Bar99] M. A Barkatou, *On rational solutions of linear differential systems*, J. Symb. Comp **28** (1999), 547–567.

[Beu92] F. Beukers, *Differential galois theory*, From Number Theory to Physics, Ed: Waldschmidt, Moussa, Luck, Itzykson. SpringerVerlag, 1992.

[BJ00] M. A. Barkatou and F. Jung, *Méthodes locales de résolutions des équations différentielles linéaires*, Ce livre, 2000.

[BMW97] M. Bronstein, T. Mulders, and J. A. Weil, *On symmetric powers of differential operators*, Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation'95,ACM Press, 1997.

[Bro92] M. Bronstein, *On solutions of linear differential equations in their coefficient field*, J.Symb.Comp **13** (1992), 413–439.

[Cor00] O. Cormier, *Communication privée*, Université de Rennes 1 (2000).

[Fak97] W. Fakler, *On second order homogeneous linear differential equations with liouvillian solutions*, Theoretical Computer Science **187** (1997), 27–48.

[Gra86] J. Gray, *Linear differential equations and group theory from riemann to poincaré*, Birkhäuser, 1986.

[HvdP95] P. Hendriks and M. van der Put, *Galois action on solutions of a differential equation*, Journal of Symbolic Computation **19** (1995), 559–576.

[Inc26] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, 1926.

[Kov86] J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*, J. Symb. Comp. **2** (1986), 3–43.

[Mar98] F. Marotte, *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes*, Annales École normale supérieure, Gauthier-Villard, 1898.

[Poo60] E.G.C Poole, *Introduction to the theory of linear differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1936, réédition : Dover, 1960.

[Ram85] J .P. Ramis, *Théorèmes d'indice gevrey pour les équations différentielles linéaires*, AMS coll. Publications, 1985.

[Sin81] M. F. Singer, *Liouvillian solutions of* n^{th} *order linear differential equations*, Amer. J. Math. **103** (1981), 661–682.

[Sin90] M. F. Singer, *An outline of differential galois theory*, Computer Algebra and Differential Equations, Ed. E. Tournier, New York: Academic Press, 1990.

[Sin96] M. F. Singer, *Testing reducibility of linear differential operators: A group theoretic perspective*, Applicable Algebra in Engineering **7** (1996), 77–104.

[Sin99] M. F. Singer, *Direct and inverse problems in differential galois theory*, pp. 527–554, Selected Works of Ellis Kolchin with Commentary , Bass, Buium, Cassidy, eds., American Mathematical Society, 1999.

[SU93a] M.F. Singer and F. Ulmer, *Galois groups of second and third order linear differential equations.*, J. Symb. Comp. **16** (1993), 9–36.

[SU93b] M.F Singer and F. Ulmer, *Liouvillian and algebraic solutions of second and third order linear differential equations.*, J. Symb. Comp. **16** (1993), 37–73.

[SU97] M.F Singer and F. Ulmer, *Linear differential equations and products of linear forms*, J. Pure Appl. Algebra **117-118** (1997), 549–563.

[vdP98] M. van der Put, *Symbolic analysis of differential equations*, Ed: A. Cohen, Springer Verlag, 1998.

[vdPS97] M. van der Put and M. F. Singer, *Galois theory of difference equations*, Lect. Notes in Math. 1666, Springer-Verlag, 1997.

[vH96] M. van Hoeij, *Rational solutions of the mixed differential equation and its application to factorization of differential operator*, Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation'96,ACM Press, 1996.

[vHRUW99] M van Hoeij, J. F. Ragot, F. Ulmer, and J. A. Weil, *Liouvillian solutions of linear differential equations of order 3 and higher..*, Journal of Symbolic Computation **28** (1999), 589–609.