

## Master ACSYON, Polynômes trigonométriques

On rappelle qu'un *polynôme trigonométrique* est une expression de la forme :

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt}.$$

C'est en effet un polynôme des fonctions  $t \rightarrow e^{it}$  et  $t \rightarrow e^{-it}$ .

*Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction continue périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

1. Définissons pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $\varphi_n$  en posant :

$$\varphi_n(t) = 2\pi \frac{\cos^{2n}(\frac{t}{2})}{\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\frac{t}{2}) dt}.$$

Montrer que

- (a)  $\varphi_n \geq 0$ ;
- (b)  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t) dt = 1$ ;
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} \varphi_n(t) dt = 0$  pour tout  $\alpha \in ]0, \pi]$ .

(a) et (b) sont évident. Reste à prouver (c).

On remarque que le dénominateur est minoré par  $\int_0^{\frac{2}{\sqrt{n}}} \cos^{2n}(\frac{t}{2}) dt$ . Comme  $\cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2}$ , le dénominateur est minoré par  $\frac{2}{\sqrt{n}}(1 - \frac{1}{2n})^n$ . Pour  $t \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ , le numérateur est lui majoré par  $\cos^{2n}(\alpha/2)$ . Par suite,  $\varphi_n(t) \leq 2\pi \frac{\cos^{2n}(\alpha/2)}{\frac{2}{\sqrt{n}}(1 - \frac{1}{2n})^n}$ . Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{2\pi - \alpha} \varphi_n(t) dt = 0$$

pour tout  $\alpha \in ]0, \pi]$ .

Pour toute fonction  $f$  continue périodique de période  $2\pi$  on pose :

$$f \star \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)\varphi_n(t) dt.$$

2. Montrer que la suite  $(f \star \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge **uniformément** vers  $f$ .

$f$  étant uniformément continue, pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $\alpha > 0$ , indépendant de  $x$  tel que pour tout  $|t| < \alpha$  on ait  $|f(x) - f(x - t)| < \varepsilon$ . Comme

$$f(x) - f \star \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - f(x - t))\varphi_n(t)dt,$$

il vient

$$\begin{aligned} |f(x) - f \star \varphi_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\alpha |f(x) - f(x - t)|\varphi_n(t)dt + \int_\alpha^{2\pi-\alpha} |f(x) - f(x - t)|\varphi_n(t)dt \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left( \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} |f(x) - f(x - t)|\varphi_n(t) \right) dt. \end{aligned}$$

On voit que

$$\int_0^\alpha |f(x) - f(x - t)|\varphi_n(t)dt \leq \varepsilon \int_0^\alpha \varphi_n(t)dt \leq \varepsilon \int_0^{2\pi} \varphi_n(t)dt = \varepsilon.$$

De manière analogue,

$$\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} |f(x) - f(x - t)|\varphi_n(t)dt \leq \varepsilon.$$

On remarque aussi que

$$\int_\alpha^{2\pi-\alpha} |f(x) - f(x - t)|\varphi_n(t)dt \leq 2\|f\|_\infty \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \varphi_n(t)dt$$

et par suite, d'après (c) de la question précédente, pour  $n$  suffisamment grand

$$\int_\alpha^{2\pi-\alpha} |f(x) - f(x - t)|\varphi_n(t)dt \leq \varepsilon.$$

En conclusion, pour  $n$  suffisamment grand et pour tout  $x \in [0, 2\pi]$  on a

$$|f(x) - f \star \varphi_n(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Par suite,  $\|f - f \star \varphi_n\|_\infty \leq \varepsilon$  et le résultat.

3. En déduire que la suite  $(f \star \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f$  dans  $L^2$ .

Comme on a toujours que

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \leq \|f\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\|f\|_\infty^2,$$

on en déduit que la convergence uniforme implique la convergence dans  $L^2$ .

4. Montrer que  $f \star \varphi_n$  est un polynôme trigonométrique.

Chaque  $\varphi_n$  est un polynôme trigonométrique. c'est-à-dire  $\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt}$ . Par suite,

$$f \star \varphi_n(x) = \varphi_n \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Il en résulte que

$$f \star \varphi_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right).$$

5. Conclure que toute fonction continue périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Immédiat.