Université de Limoges
Faculté des Sciences

Année Universitaire 2008-2009

Master de Mathématiques, Première Année
Algèbre Effective
Feuille d'exercices n° 3
Résultants et élimination

Exercice 1

Soit k un corps effectif. On note $k[X]_{<m}$ l'ensemble des polynômes de degré strictement inférieur à m. Soit $P, Q \in k[X]$ des polynômes de degrés respectifs $m \geq n$. On considère l'application de Sylvester

$$\begin{array}{rccc} \phi_{P,Q} : & k[X]_{<n} \times k[X]_{<m} & \to & k[X]_{<m+n} \\ & (U, V) & \mapsto & U.P + V.Q \end{array}$$

1) Donner la matrice de $\phi_{P,Q}$ dans la base $(1,0), (X,0), \ldots, (X^{n-1},0), (0,1), \ldots, (0,X^{m-1})$.

2) Rappeler pourquoi le noyau de $\phi_{P,Q}$ est non-trivial si et seulement si P et Q ont un facteur commun

3) On suppose que P et Q ont un pgcd D de degré $d > 0$. Donner un couple (U, V) du noyau de $\phi_{P,Q}$; quels sont les degrés des polynômes U et V correspondant ?

4) En déduire une base du noyau de $\phi_{P,Q}$ en fonction de d. Quel lien trouvez-vous entre le rang de l'application de Sylvester $\phi_{P,Q}$ et le degré d du pgcd de P et Q ?

5) Montrer que si P et Q sont premiers entre eux, il existe un unique couple $(S, T) \in k[X]_{<n} \times k[X]_{<m}$ tel que $\phi_{P,Q}(S, T) = 1$. Que vous rappelle cette relation ? comment aurait-on pu trouver ces polynômes S et T autrement ?

Exercice 2

1) Calculer le résultant des polynômes P et Q dans les cas suivants :

$$(1) : \qquad P = x^2 - x + 4, \qquad Q = x^2 - 3x + 1;$$

$$(2) : \qquad P = 2x^3 - x^2 + 7x + 4, \qquad Q = 2x^2 + 11x + 5.$$

2) Dans les deux cas, appliquer l'algorithme d'Euclide à P et Q. Ecrire la matrice de Sylvester de P et Q, et lui appliquer la réduction par pivot de Gauss. Qu'observez vous ?

Exercice 3

On considère la quadrique réelle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 2y - z = 0$. Trouver l'equation de la projection orthogonale de l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ sur le plan $z = 0$ (on pourra esquisser un dessin, et utiliser un résultant).

Exercice 4

On considère deux polynômes P et Q à deux indeterminées X et Y et à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On note R_Y (respectivement R_X) le résultant de P et Q par rapport à Y (respectivement X). C'est donc un polynôme en X (respectivement Y).

1. Donner le degré des polynômes R_X et R_Y.

2. Établir un lien entre les zeros de R_X, R_Y, P et Q.
3. Résoudre le système d'équations algébriques

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y &= 0 \\ 3x^2 + 2y^2 + 6xy &= 0 \end{cases}$$

Exercice 5

soit k un corps algébriquement clos. On appelle *courbe algébrique sur* k le lieu $\mathcal{C}$ des zéros d'un polynôme $P \in k[X, Y]$. On dira que la courbe est associée au polynôme P.

1) On considère les courbes algébriques $\mathcal{C}_1$ associée à P_1 et $\mathcal{C}_2$ associée à P_2.

a) Montrer que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est infinie si et seulement si P_1 et P_2 ont un facteur commun.

b) Construire un algorithme qui détermine l'intersection de P_1 et P_2.

2) On appelle point singulier de $\mathcal{C}$ un point $(x, y) \in \mathcal{C}$ vérifiant $\{\frac{\partial P}{\partial X}(x, y) = 0, \frac{\partial P}{\partial Y}(x, y) = 0\}$. Construire un algorithme permettant de déterminer (ou, au moins, de compter) les points singuliers de $\mathcal{C}$.

Exercice 6

Soit k un corps algébriquement clos.

1) On considère la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x &= 3t - t^3 \\ y &= 3t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{C}$

Montrer que c'est une courbe algébrique, associée à un polynôme P_0 qu'on déterminera. (on dit que l'équation $P_0(x, y)$ est l'équation cartésienne ou encore l'équation implicite de la courbe).

2) On considère les courbes C_1 et C_2 associées respectivement aux polynômes

$$P_1 = Y^2 + X^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad P_2 = Y^2 + X^2 + XY - X + Y.$$

a) Donner une méthode pour déterminer les abscisses des points de l'intersection $C_1 \cap C_2$.

b) Déterminer les abscisses des points de l'intersection $C_1 \cap C_2$.

c) Déterminer les points de l'intersection $C_1 \cap C_2$.

3) On admet disposer d'un algorithme `qsolve` qui, étant donné un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ détermine la liste de celles de ses racines qui sont dans $\mathbb{Q}$.

a) Écrire un algorithme qui, étant donné deux polynômes P_3 et P_4 de $\mathbb{Q}[X, Y]$ *premiers entre eux*, détermine les points de $\mathbb{Q}^2$ qui sont dans l'intersection des courbes algébriques associées.

b) À quoi sert la condition "premiers entre eux" ?

c) Démontrer la correction de votre algorithme.

d) Que donne votre algorithme sur les polynômes P_1 et P_2 de la question précédente.

Exercice 7

On admet disposer d'un algorithme `isolve` qui, étant donné $P \in \mathbb{Q}[X]$, décide s'il a des racines entières et, si oui, les calcule (vous pouvez construire facilement un tel algorithme). Construire un algorithme qui, étant donné $Q \in \mathbb{Q}[X]$, décide s'il admet deux racines différant d'un entier (et le calcule), c'est à dire si Q admet deux racines $x_0 \in \mathbb{C}$ et $x_0 + n$ avec $n \in \mathbb{N}$ (sans calculer x_0 mais en calculant n).