Economie de l'incertain

séance du 5 novembre 2005

Exercice 1

Soient deux individus, 1 et 2, avec le même niveau de richesse initiale $W_0 = 100$, mais avec des fonctions d'utilité différentes, respectivement

$$U_1(W) = ln(W)$$

et

$$U_2(W) = W^{1/2}$$

En plus de W_0 , ils possèdent le billet de loterie suivant :

$$\tilde{x} = \mathcal{L}(1, 10, 100; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

1. Calculez et comparez les primes de risque respectives des deux individus pour cette loterie.
2. Y a-t-il une raison de s'attendre à ces résultats (calculer l'aversion abolue pour le risque des deux agents) ?

Exercice 2

Supposez que la fonction d'utilité d'un individu soit la suivante :

$$u(w) = -e^{-w}$$

. Cet individu peut participer à une loterie lui procurant une richesse w_1 ou w_2 avec des probabilités égales.

1. Calculez l'équivalent certain de cette loterie pour les couples de richesse suivants : $(0, 10)$, $(10, 20)$, $(20, 30)$. Que pouvez-vous en conclure ?
2. Si ce même individu avait la fonction d'utilité suivante :

   $$u(w) = 5 - 0.2e^{-w}$$

   quel serait l'équivalent certain de cette loterie pour les couples de richesse citées ? Que pouvez-vous en conclure ?

3. Est-ce que cet individu est averse au risque ? Argumentez votre réponse à l'aide de deux résultats.

Exercice 3

Vous êtes un étudiant dont la richesse totale est de 20000 euros. Vous devez vous rendre aux USA. Vous possédez un billet qui ne donne aucune flexibilité dans les dates, de sorte que si vous tombez malade et ratez l'avion vous devez acheter un autre billet au coût de 1000 euros.

1. Si votre fonction d'utilité est $u(w) = w^{0.4}$, calculez le montant maximal que vous êtes disposé à payer pour une assurance qui vous rembourse le billet en cas de maladie. Vous estimez à 1% la probabilité de rater l'avion pour cause de maladie.
2. Si vous êtes professeur, avec la même fonction d'utilité et la même probabilité de maladie, mais avec une richesse totale de 100000 euros, acceptez-vous de payer le montant d'assurance déterminé sous 1 ?

Solution 1

1. On sait que lea prime de risque est donnée par :

$$\Pi(w_0, \tilde{x}) = E(\tilde{x}) + w_0 - w^*$$

Calcul de $E(\tilde{x})$

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.10 + \frac{1}{3}.100 = 37$$

Calcul de w_1^* pour l'agent 1 :

$$ln(w_1^*) = \frac{1}{3}ln(101) + \frac{1}{3}ln(110) + \frac{1}{3}ln(200) = 4.8713$$

$$w_1^* \approx 130.50$$

$$\Pi_1(w_0, \tilde{x}) = 37 + 100 - 130.50 = 6.5$$

On constate que la prime de risque est positive donc l'agent 1 est risquophobe.
Calcul de w_1^* pour l'agent 2 :

$$ln(w_2^*) = \frac{1}{3}\sqrt{101} + \frac{1}{3}\sqrt{110} + \frac{1}{3}\sqrt{200} = 11.56$$

$$w_2^* \approx 133.63$$

$$\Pi_2(w_0, \tilde{x}) = 37 + 100 - 133.63 \approx 3.36$$

On constate que la prime de risque est positive donc l'agent 2 est également risquophobe.

2. On peut s'attendre à ce résultat dans la mesure ou les deux agents ont des fonctions d'utilité d'agent risquophobe. Il est possible de calculer le coefficient d'aversion absolu pour le risque pour les deux agents.

$$R^{U_1} = -\frac{u_1^{''}(w)}{u_1^{'}(w)} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$R^{U_2} = -\frac{u_2^{''}(w)}{u_2^{'}(w)} = \frac{\frac{-1}{4x^{3/2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{2x}$$

On constate que l'agent 2 est moins risquophobe que l'agent 1 puisque $R^{U_2} < R^{U_1}$, il est donc normal que la prime de risque de l'agent 2 soit inférieure à celle de l'agent 1.

Solution 2

1. L'équivalent certain est donné par :

$$-e^{-w_1^*} = -\frac{1}{2}e^{-w_1} - \frac{1}{2}e^{-w_2}$$

$$-e^{-w_1^*} = -\frac{1}{2}e^{-0} - \frac{1}{2}e^{-10} \approx -\frac{1}{2}$$

D'où,

$$w_1^* = 0.6931$$

$$-e^{-w_1^*} = -\frac{1}{2}e^{-10} - \frac{1}{2}e^{-20}$$

D'où,

$$w_1^* = 10.6931$$

$$-e^{-w_1^*} = -\frac{1}{2}e^{-20} - \frac{1}{2}e^{-30}$$

D'où,

$$w_1^* = 20.6931$$

On peut conclure qu'en posant :

$$\tilde{x_1} = \mathcal{L}(0, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\tilde{x_2} = \mathcal{L}(10, 20; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 10 + \mathcal{L}(0, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\tilde{x_3} = \mathcal{L}(20, 30; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 20 + \mathcal{L}(0, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

2. Si maintenant la fonction d'utilité est :

$$u(w) = 5 - 0.2e^{-w}$$

L'équivalent certain est :

$$5 - 0.2e^{-w^*} = \frac{1}{2}(5 - 0.2e^{-w_1}) + \frac{1}{2}(5 - 0.2e^{-w_2})$$

En simplifiant on retrouve :

$$-e^{-w^*} = -\frac{1}{2}e^{-w_1} - \frac{1}{2}e^{-w_2}$$

Soit la première fonction d'utilité. Donc les équivalents certains seront identiques. A une transformation affine près (voir cours) les fonctions d'utilité définissent la même psychologie des agents. On peut vérifier que les agents ont le même degré d'aversion au risque :

$$R^{U_1} = -\frac{u_1^{''}(w)}{u_1^{'}(w)} = -\frac{-e^{-x}}{e^{-x}} = 1$$

$$R^{U_2} = -\frac{u_2^{''}(w)}{u_2^{'}(w)} = -\frac{-0.2e^{-x}}{0.2e^{-x}} = 1$$

Solution 3

1. Vous êtes face à loterie suivante :

$$\tilde{x} = 20000\mathcal{L}(-1000, 0; \frac{1}{100}, \frac{99}{100}) = \mathcal{L}(19000, 20000; \frac{99}{100}, \frac{99}{100})$$

L'équivalent certain est :

$$w^{*0.4} = \frac{1}{100}19000^{0.4} + \frac{99}{100}20000^{0.4}$$

$$w^{*0.4} \approx 52.519882$$

$$w^* \approx 19989.84$$

Le prix de vente de la loterie est :

$$P_v(w_0, \tilde{x}) = w^* - w_0 \approx -10,15$$

Celui signifie que notre étudiant accepte de donner 10,15 euros pour se débarasser de cette loterie. Ainsi on peut imaginer qu'il accepterait de payer une assurance d'un montant maximum de 10.15 euros pour couvrir son risque. Si l'assureur demandait une somme plus importante, notre étudiant refuserait de s'assurer car son équivalent certain serait inférieur à celui qu'il aurait en gardant la loterie.

2. Le professeur est face à la loterie suivante :

$$\tilde{x} = 100000\mathcal{L}(-1000, 0; \frac{1}{100}, \frac{99}{100}) = \mathcal{L}(99000, 100000; \frac{99}{100}, \frac{99}{100})$$

L'équivalent certain est :

$$w^{*0.4} = \frac{1}{100}99000^{0.4} + \frac{99}{100}100000^{0.4}$$

$$w^{*0.4} \approx 99.99598794$$

$$w^{*} \approx 99989.9701$$

Le prix de vente de la loterie est :

$$P_v(w_0, \tilde{x}) = w^* - w_0 \approx -10.029$$

Le professeur ne serait prêt à donner que 10.02 euros pour s'assurer. On pouvait s'attendre à un tel résultat en déterminant l'aversion absolue au risque.

$$R^{U_1} = -\frac{u_1^{''}(w)}{u_1^{'}(w)} = -\frac{(a-1)w^{a-2}}{aw^{a-1}} = (1-a)\frac{1}{w}$$

On constate qu'elle diminue avec la richesse.