



**Laboratoire d'Arithmétique,
Calcul formel et d'Optimisation**



UMR CNRS 6090

Equation d'amorçage d'intégrales premières sous forme de séries formelles

D. Boularas & A. Chouikrat

Rapport de recherche n° 2004-10
Déposé le 12 octobre 2004

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

Tél. (33) 5 55 45 73 23 - Fax. (33) 5 55 45 73 22 - laco@unilim.fr
<http://www.unilim.fr/laco/>

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

Tél. (33) 5 55 45 73 23 - Fax. (33) 5 55 45 73 22 - laco@unilim.fr
<http://www.unilim.fr/laco/>

Équation d'amorçage d'intégrales premières sous forme de séries formelles

D. Boularas*, A. Chouikrat†

12 octobre 2004

Résumé

Dans ce travail, on établit une équation diophantienne, appelée *équation d'amorçage*, dont les solutions correspondent aux multi-degrés des monômes de démarrage des intégrales premières formelles au voisinage d'un point singulier de systèmes différentiels polynomiaux de valuation 1 et de dimension quelconque.

Classification AMS : 34A34, 34C20, 14L30, 14L35.

Mots clés : systèmes différentiels, intégrabilité, intégrales premières.

1 Définitions, notations, motivations

Le problème de l'intégrabilité des systèmes différentiels polynomiaux est un sujet à la fois ancien, plaisant et accessible puisqu'il se pose en de termes simples.

Soit \mathbb{K} le corps des nombres réels (\mathbb{R}) ou complexes (\mathbb{C}) et $\mathcal{P}(n, m)$ l'espace vectoriel des systèmes différentiels autonomes à coefficients dans \mathbb{K}

$$\frac{dx^j}{dt} = P^j(x), \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

où $x = {}^T(x^1, x^2, \dots, x^n)$, représenté avec des indices supérieurs, est un élément courant de l'espace des phases \mathbb{K}^n et les polynômes P^j ($j = 1, 2, \dots, n$) sont de degré au plus égal à m .

Le "temps" t pourrait être réel ou complexe.

*LACO, UMR 6090, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges, 123, Avenue A. Thomas, 87000, Limoges, France

†Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Saad Dahlab, Blida, Algérie

Définition 1 Une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$, continûment différentiable sur l'ouvert \mathcal{O} de \mathbb{K}^n et à valeurs dans \mathbb{K} est une intégrale première du système différentiel (1) si

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^j}(x) P^j(x) = 0. \quad (2)$$

Le membre de gauche de l'égalité (2) définit un opérateur linéaire $\Delta_{\mathcal{O},P}$ de l'espace vectoriel des fonctions continûment différentiables $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ dans l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{C}(\mathcal{O})$. Le problème de l'intégrabilité des systèmes différentiels (1) consiste à décrire le noyau de cet opérateur. Il relève plutôt de la "résolution" du système considéré.

On sait qu'au voisinage de tout point régulier x_0 (c'est-à-dire, $P(x_0) \neq 0$) le noyau de $\Delta_{\mathcal{O},P}$ est engendré par $n - 1$ intégrales premières fonctionnellement indépendantes ([6, p.206]). Ce résultat, important en soi, demeure théorique.

Par contre au voisinage d'un point singulier, des travaux de plus en plus nombreux et d'essence effective ([4, 5, 7]) sont consacrés à la recherche d'intégrales premières dans des classes particulières de fonctions comme celles des polynômes, des fractions rationnelles, des fonctions algébriques, des exponentielles ou, plus généralement, dans des extensions différentielles du corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(x)$.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux intégrales premières développables en séries entières (formelles) au voisinage d'un point singulier, ici $x = 0$, où la matrice du linéarisé n'est pas nulle. Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, à savoir $P(O) = 0$ et $A = \frac{\partial P}{\partial x}(0) \neq 0$, nous dirons que le polynôme vectoriel P est de valuation 1.

Le principal résultat que nous obtenons est l'établissement d'une famille d'équations diophantiennes multivariées, dont les solutions correspondent aux partitions de la valuation de la série candidate à devenir une intégrale première.

Ces équations sont à coefficients dans $\mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques associées aux valeurs propres de A .

2 Écriture matricielle des conditions d'intégrabilité

2.1 Ordre total-léxicographique

On note $\text{Sym}(k)$ l'ensemble des formes algébriques homogènes de degré k et S l'espace vectoriel de dimension infinie des séries formelles :

$$S = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \text{Sym}(k).$$

où ([8, p. 21])

$$\dim(\text{Sym}(k)) = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

L'ensemble des multi-degrés est décrit par le produit cartésien \mathbb{N}^n . On note le degré total d'un monôme $(x^1)^{i_1}(x^2)^{i_2}\dots(x^n)^{i_n}$ l'entier naturel $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$.

L'ensemble des multi-degrés \mathbb{N}^n peut être muni de l'ordre total-léxicographique :

$$i \geq j \iff \begin{cases} |i| > |j| \\ \text{ou} \\ |i| = |j| \text{ et } \begin{cases} \text{la première composante non nulle de } i - j \\ \text{est positive} \end{cases} \end{cases}$$

C'est bien un ordre total.

En respectant l'ordre total-léxicographique, l'ensemble des formes algébriques

$$\{(x^1)^{i_1}(x^2)^{i_2}\dots(x^n)^{i_n}; \quad |i| = k\}$$

définit une base (canonique) dans laquelle tout élément de $\text{Sym}(k)$

$$\sum_{|i|=k} f_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x^1)^{i_1} (x^2)^{i_2} \dots (x^n)^{i_n}$$

pourrait être assimilé à un vecteur ligne

$$[f_{k,0,0,\dots,0}, f_{k-1,1,0,\dots,0}, f_{k-1,0,1,\dots,0}, \dots, f_{k-2,2,0,\dots,0}, \dots, f_{0,k,0,\dots,0}, f_{0,k-1,1,\dots,0}, \dots, f_{0,0,0,\dots,k}].$$

Ainsi, toute forme algébrique de degré total k s'écrit comme produit scalaire :

$$[f_{k,0,0,\dots,0}, f_{k-1,1,0,\dots,0}, f_{k-1,0,1,\dots,0}, \dots, f_{0,0,0,\dots,k}] \begin{bmatrix} (x^1)^k \\ (x^1)^{k-1}(x^2)^1 \\ (x^1)^{k-1}(x^3)^1 \\ \vdots \\ (x^n)^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

Par exemple dans le cas de la dimension $n = 2$, l'ordre total-léxicographique :

$$x^1 > x^2; (x^1)^2 > x^1x^2 > (x^2)^2; \dots; (x^1)^k > (x^1)^{k-1}x^2 > \dots > (x^2)^k; \dots$$

induit une représentation "matricielle" des séries formelles (sans terme constant) :

$$[f_{1,0}, f_{0,1}, f_{2,0}, f_{1,1}, f_{0,2}, \dots, f_{k,0}, f_{k-1,1}, \dots, f_{0,k}, \dots]$$

L'expression (3) peut être écrite plus simplement sous la forme $F_{[k]} X^{[k]}$ où $F_{[k]}$ et $X^{[k]}$ désignent respectivement les vecteurs ligne et colonne correspondants.

Utilisant cette écriture simplifiée, une série formelle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|i|=k} f_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x^1)^{i_1} (x^2)^{i_2} \dots (x^n)^{i_n}$$

devient

$$F_1 X^1 + F_2 X^2 + \dots + F_k X^k + \dots \quad (4)$$

tandis que le second membre du système différentiel (1), de valuation 1 et de degré m , s'écrit sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = P_1 X^1 + P_2 X^2 + \dots + P_m X^m, \quad (5)$$

où cette fois, P_i , $i = 1, 2, \dots, m$, est une matrice à n lignes et $\frac{(n+i-1)!}{(n-1)!i!}$ colonnes.

2.2 Écriture matricielle des conditions

Dans ce paragraphe, pour alléger l'écriture, nous adoptons la notation d'Einstein :

$$u_1 v^1 + u_2 v^2 + \dots + u_l v^l = u_i v^i.$$

Une série $F(x) = F_1 X^1 + F_2 X^2 + \dots + F_k X^k + \dots$ est une intégrale première du système différentiel (1) si elle vérifie l'équation (2) que l'on réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x^j} P^j(x) = 0,$$

c'est-à-dire, en reprenant les notations précédentes :

$$\frac{\partial(F_1 X^1 + F_2 X^2 + \dots)}{\partial x^j} \left[P_1^j X^1 + P_2^j X^2 + \dots + P_m^j X^m \right] = 0.$$

En développant le membre de gauche de cette équation par degré d'homogénéité, on obtient la suite infinie d'équations :

$$\begin{aligned} \text{degré 1 :} & \quad \frac{\partial(F_1 X^1)}{\partial x^j} P_1^j X^1 = 0, \\ \text{degré 2 :} & \quad \frac{\partial(F_1 X^1)}{\partial x^j} P_2^j X^2 + \frac{\partial(F_2 X^2)}{\partial x^j} P_1^j X^1 = 0, \\ \text{degré 3 :} & \quad \frac{\partial(F_1 X^1)}{\partial x^j} P_3^j X^3 + \frac{\partial(F_2 X^2)}{\partial x^j} P_2^j X^2 + \frac{\partial(F_3 X^3)}{\partial x^j} P_1^j X^1 = 0, \\ & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \text{degré } m : & \quad \frac{\partial(F_1 X^1)}{\partial x^j} P_m^j X^m + \frac{\partial(F_2 X^2)}{\partial x^j} P_{m-1}^j X^{m-1} + \dots + \frac{\partial(F_m X^m)}{\partial x^j} P_1^j X^1 = 0, \\ \text{degré } m+1 : & \quad \frac{\partial(F_2 X^2)}{\partial x^j} P_m^j X^m + \frac{\partial(F_3 X^3)}{\partial x^j} P_{m-1}^j X^{m-1} + \dots + \frac{\partial(F_{m+1} X^{m+1})}{\partial x^j} P_1^j X^1 = 0, \\ & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Les premières relations qui se déduisent de la relation générale (7) sont :

$$\begin{aligned}
& [f_{1,0}, f_{0,1}] \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{0,1} \end{bmatrix} = 0, \\
& [f_{1,0}, f_{0,1}] \begin{bmatrix} a_{2,0} & a_{1,1} & a_{0,2} \\ b_{2,0} & b_{1,1} & b_{0,2} \end{bmatrix} + [f_{2,0}, f_{1,1}, f_{0,2}] \begin{bmatrix} 2a_{1,0} & 2a_{0,1} & 0 \\ b_{1,0} & a_{1,0} + b_{0,1} & a_{0,1} \\ 0 & 2b_{1,0} & 2b_{0,1} \end{bmatrix} = 0, \\
& [f_{1,0}, f_{0,1}] \begin{bmatrix} a_{3,0} & a_{2,1} & a_{1,2} & a_{0,3} \\ b_{3,0} & b_{2,1} & b_{1,2} & b_{0,3} \end{bmatrix} + [f_{2,0}, f_{1,1}, f_{0,2}] \begin{bmatrix} 2a_{2,0} & 2a_{1,1} & 2a_{0,2} & 0 \\ b_{2,0} & b_{1,1} + a_{2,0} & b_{0,2} + a_{1,1} & a_{0,2} \\ 0 & 2b_{2,0} & 2b_{1,1} & 2b_{0,2} \end{bmatrix} + \\
& \quad + [f_{3,0}, f_{2,1}, f_{1,2}, f_{0,3}] \begin{bmatrix} 3a_{1,0} & 3a_{0,1} & 0 & 0 \\ b_{1,0} & 2a_{1,0} + b_{0,1} & 2a_{0,1} & 0 \\ 0 & 2b_{1,0} & 2b_{0,1} + a_{1,0} & a_{0,1} \\ 0 & 0 & 3b_{1,0} & 3b_{0,1} \end{bmatrix} = 0, \\
& [f_{2,0}, f_{1,1}, f_{0,2}] \begin{bmatrix} 2a_{3,0} & 2a_{2,1} & 2a_{1,2} & 2a_{0,3} & 0 \\ b_{3,0} & a_{3,0} + b_{2,1} & a_{2,1} + b_{1,2} & b_{0,3} + a_{1,2} & a_{0,3} \\ 0 & 2b_{3,0} & 2b_{2,1} & 2b_{1,2} & 2b_{0,3} \end{bmatrix} \\
& \quad + [f_{3,0}, f_{2,1}, f_{1,2}, f_{0,3}] \begin{bmatrix} 3a_{2,0} & 3a_{1,1} & 3a_{0,2} & 0 & 0 \\ b_{2,0} & b_{1,1} + 2a_{2,0} & 2a_{1,1} + b_{0,2} & 2a_{0,2} & 0 \\ 0 & 2b_{2,0} & a_{2,0} + 2b_{1,1} & 2b_{0,2} + a_{1,1} & a_{0,2} \\ 0 & 0 & 3b_{2,0} & 3b_{1,1} & 3b_{0,2} \end{bmatrix} \\
& \quad + [f_{4,0}, f_{3,1}, f_{2,2}, f_{1,3}, f_{0,4}] \begin{bmatrix} 4a_{1,0} & 4a_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{1,0} & b_{0,1} + 3a_{1,0} & 3a_{0,1} & 0 & 0 \\ 0 & 2b_{1,0} & 2a_{1,0} + 2b_{0,1} & 2a_{0,1} & 0 \\ 0 & 0 & 3b_{1,0} & 3b_{0,1} + a_{1,0} & a_{0,1} \\ 0 & 0 & 0 & 4b_{1,0} & 4b_{0,1} \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

La procédure *EcrMat* (voir l'annexe 1) permet de calculer les matrices $M_{[i,k]}$ pour tous les entiers naturels i et k tels que : $k - \min(k, m) + 1 \leq i \leq k$.

2.3.2 Systèmes différentiels de dimension 3 et de degré 2

Ils sont de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{2,0,0}x^2 + a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,1,1}yz + a_{0,0,2}z^2 \\ \frac{dy}{dt} = b_{1,0,0}x + b_{0,1,0}y + b_{0,0,1}z + b_{2,0,0}x^2 + b_{1,1,0}xy + b_{1,0,1}xz + b_{0,2,0}y^2 + b_{0,1,1}yz + b_{0,0,2}z^2 \\ \frac{dz}{dt} = c_{1,0,0}x + c_{0,1,0}y + c_{0,0,1}z + c_{2,0,0}x^2 + c_{1,1,0}xy + c_{1,0,1}xz + c_{0,2,0}y^2 + c_{0,1,1}yz + c_{0,0,2}z^2 \end{cases}$$

Les premières relations déduites de la relation générale (7) sont :

$$\begin{aligned}
& [f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1}] \begin{bmatrix} a_{1,0,0} & a_{0,1,0} & a_{0,0,1} \\ b_{1,0,0} & b_{0,1,0} & b_{0,0,1} \\ c_{1,0,0} & c_{0,1,0} & c_{0,0,1} \end{bmatrix} = 0, \\
& [f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1}] \begin{bmatrix} a_{2,0,0} & a_{1,1,0} & a_{1,0,1} & a_{0,2,0} & a_{0,1,1} & a_{0,0,2} \\ b_{2,0,0} & b_{1,1,0} & b_{1,0,1} & b_{0,2,0} & b_{0,1,1} & b_{0,0,2} \\ c_{2,0,0} & c_{1,1,0} & c_{1,0,1} & c_{0,2,0} & c_{0,1,1} & c_{0,0,2} \end{bmatrix} \\
& + [f_{2,0,0}, f_{1,1,0}, f_{1,0,1}, f_{0,2,0}, f_{0,1,1}, f_{0,0,2}] \times \\
& \times \begin{bmatrix} 2a_{1,0,0} & 2a_{0,1,0} & 2a_{0,0,1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{1,0,0} & a_{1,0,0} + b_{0,1,0} & b_{0,0,1} & a_{0,1,0} & a_{0,0,1} & 0 \\ c_{1,0,0} & c_{0,1,0} & a_{1,0,0} + c_{0,0,1} & 0 & a_{0,1,0} & a_{0,0,1} \\ 0 & 2b_{1,0,0} & 0 & 2b_{0,1,0} & 2b_{0,0,1} & 0 \\ 0 & c_{1,0,0} & b_{1,0,0} & c_{0,1,0} & b_{0,1,0} + c_{0,0,1} & b_{0,0,1} \\ 0 & 0 & 2c_{1,0,0} & 0 & 2c_{0,1,0} & 2c_{0,0,1} \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

La procédure *EcrMatT* (voir l'annexe 2) permet de calculer les matrices $M_{[i,k]}$ pour tous les entiers naturels i et k tels que : $k - \min(k, m) + 1 \leq i \leq k$.

3 Équations d'amorçage des intégrales premières

Si le système différentiel (1) admet une intégrale première F de valuation d , dans l'écriture (4) de celle-ci, on a nécessairement :

$$F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F_{d-1} = 0 \quad \text{et} \quad F_d \neq 0.$$

Par conséquent, la première équation consistante que nous rencontrons est :

$$F_d M_{[d,d]} = 0.$$

Elle admet une solution non nulle si, et seulement si,

$$\det(M_{[d,d]}) = 0.$$

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Sachant que le système (7) est triangulaire, une fois le premier F_d trouvé, on l'injecte dans l'équation (vectorielle) suivante et on déduit F_{d+1} . On continue ce processus tant que le passage d'une équation à une autre est compatible. Il peut s'interrompre de deux manières. La première est lorsqu'une équation n'a pas de solution. Dans ce cas, Le système différentiel (1) n'a pas d'intégrale première formelle de valuation d . La seconde manière apparaît lorsqu'à partir d'un certain rang D , la nullité des $F_i, i = D + 1, D + 2, \dots, D + m - 1$, est compatible avec les équations. Dans ce cas, le

système (1) admet une intégrale première polynomiale de valuation d et de degré D . Cela entraîne, en particulier, que le rang de la matrice $M_{[D-\min(D,m)+1,D]}$ est inférieur à

$$\frac{(D - \min(D, m) + n)!}{(D - \min(D, m) + 1)!(n - 1)!}.$$

Nous obtenons alors une condition nécessaire d'existence d'intégrale première polynomiale qu'on appellera, condition de *rupture*.

Dans ce travail, nous nous intéresserons seulement à la condition d'amorçage d'intégrales premières formelles et pour cela, on va détailler le calcul de $M_{[d,d]}$.

3.1 Expression des matrices $M_{[d,d]}$

De manière générale, la matrice $M_{[l,d]}$, où $d = 1, 2, 3, \dots$ et $l = d - \min(k, m) + 1, d - \min(k, m) + 2, \dots, d$, est définie par :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(F_l X^l)}{\partial x^j} P_{d-l+1}^j X^{d-l+1} = F_l M_{[l,d]} X^d.$$

Nous nous intéresserons particulièrement à la matrice $M_{[d,d]}$ qui est carrée et de dimension $\frac{(d+n-1)!}{(d)!(n-1)!} \times \frac{(d+n-1)!}{(d)!(n-1)!}$. Cette matrice, notée L , est définie par :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(F_d X^d)}{\partial x^j} A^j X^1 = F_d L X^d = \sum_{|i|=d} \sum_{|j|=d} f_{j_1, j_2, \dots, j_n} L_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j_1, j_2, \dots, j_n} (x^1)^{i_1} (x^2)^{i_2} \dots (x^n)^{i_n},$$

où la matrice A correspond à la partie linéaire du polynôme P , c'est-à-dire P_1 , selon la notation (5). Nous nous proposons de calculer tous les coefficients $L_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j_1, j_2, \dots, j_n}$ de la matrice L . Pour faciliter ce calcul, on écrit l'expression

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(F_d X^d)}{\partial x^j} A^j X^1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=d} \frac{\partial \left[f_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x^1)^{i_1} (x^2)^{i_2} \dots (x^n)^{i_n} \right]}{\partial x^j} \left[\sum_{q=1}^n A_q^j x^q \right]$$

sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{|i|=d} \left\{ i_1 f_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x^1)^{i_1-1} (x^2)^{i_2} \dots (x^n)^{i_n} \left[A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + \dots + A_n^1 x^n \right] \right. \\ & \quad + i_2 f_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x^1)^{i_1} (x^2)^{i_2-1} \dots (x^n)^{i_n} \left[A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + \dots + A_n^2 x^n \right] \\ & \quad + \dots + i_n f_{i_1, i_2, \dots, i_n} (x^1)^{i_1} (x^2)^{i_2} \dots (x^n)^{i_n-1} \left[A_1^n x^1 + A_2^n x^2 + \dots + A_n^n x^n \right] \left. \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

On remarque alors que les multi-indices inférieur et supérieur sont égaux à deux indices près qui diffèrent au plus d'une unité. D'où la proposition :

Proposition 1 La matrice L est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n} = 0 \quad \text{si } |i - j| > 2, \\ L_{i_1 \dots (i_l - 1) \dots (i_q + 1) \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} = i_l A_q^l, \\ L_{i_1 \dots (i_l + 1) \dots (i_q - 1) \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} = i_q A_l^q, \\ L_{i_1 i_2 \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} = (i_1 A_1^1 + i_2 A_2^2 + \dots + i_n A_n^n). \end{array} \right. \quad (9)$$

Corollaire 1 La matrice A est diagonale (triangulaire inférieure, triangulaire supérieure) si, et seulement si, quelle que soit $d = 1, 2, 3, \dots$, la matrice $M_{[d,d]}$ est diagonale (triangulaire inférieure, triangulaire supérieure).

Corollaire 2 Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres (éventuellement égales) de la partie linéaire A du système (1), alors les valeurs propres de la matrice $M_{[d,d]}$ sont de la forme $i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + \dots + i_n \lambda_n$.

Grâce à l'ordre utilisé et aux corollaires précédents, on peut dire que le déterminant de L ne change pas si on remplace la matrice A par sa forme de Jordan. Par conséquent,

Proposition 2 Le déterminant de la matrice $M_{[d,d]}$ est égal à :

$$\prod_{i_1 + i_2 + \dots + i_n = d} (i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + \dots + i_n \lambda_n). \quad (10)$$

Cette quantité étant une fonction symétrique, elle s'exprime nécessairement ([3, p. 307]) à l'aide des fonctions symétriques de base, c'est-à-dire, des coefficients du polynôme caractéristique de A :

$$\det(\lambda 1_n - A) = \lambda^n - \sigma_1(A) \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(A),$$

où

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j, \quad \dots, \quad \sigma_n = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Par conséquent,

$$\det M_{[d,d]} = S_d(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

où S_d est un polynôme. Fait remarquable, ce polynôme se factorise en un produit de facteurs irréductibles dont la structure de chacun est décrite entièrement par l'action du groupe symétrique.

3.2 Action du groupe symétrique sur \mathbb{N}^n

On note \mathfrak{S}_n le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\varphi : \mathfrak{S}_n \times \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^n$ l'action définie par

$$\varphi((\sigma, i)) = (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(n)}). \quad (11)$$

où $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Cette action laisse invariant les hyper-réseaux \mathcal{H}_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ qui, rappelons-le, sont constitués de n -uplets d'entiers naturels dont la somme est égale à k . Elle induit donc sur les ensembles \mathcal{H}_k des partitions en orbites :

$$\mathcal{O}(i) = \{(i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(n)}); \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Par exemple, pour tout entier naturel non nul k ,

1. $\mathcal{O}((k, 0, 0, \dots, 0)) = \{(k, 0, 0, \dots, 0), (0, k, 0, \dots, 0), (0, 0, k, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, k)\}$,
2. et si de plus k est multiple de n ($k = nl$),

$$\mathcal{O}((l, l, l, \dots, l)) = \{(l, l, l, \dots, l)\}.$$

Il est clair que la dimension de $\text{Sym}(k)$ est égale au nombre d'éléments de \mathcal{H}_k :

$$\#\mathcal{H}_k = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}. \quad (12)$$

Pour calculer le nombre d'orbites, on prendra pour chacune d'elle un représentant $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ tel que $|i| = k$ et $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$. Ce représentant correspond à une partition de k , ne dépassant pas n parts. Par conséquent, le nombre d'orbites de \mathcal{H}_k est égal au nombre de partitions de k ne dépassant pas n parts.

Soient $p_n(k)$ le nombre de partitions de l'entier naturel k en au plus n parts et $p_{n,m}(k)$ le nombre de partitions de k en au plus n parts inférieures ou égales à m . D'après [2, p. 33], les nombres $p_{n,m}(k)$ sont définis par la fonction génératrice :

$$G_{n,m}(t) = \frac{(1-t^{m+n})(1-t^{m+n-1}) \cdots (1-t^{n+1})}{(1-t^m)(1-t^{m-1}) \cdots (1-t)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,m}(k)t^k. \quad (13)$$

Sachant que les parts d'une partition de k ne dépassent pas k , on a :

$$p_n(k) = p_{n,k}(k).$$

De manière générale, pour obtenir tous les $p_n(k)$, on fait tendre m vers l'infini.

Proposition 3 *Le produit $g_n(t) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-t^{m+n}}{1-t^m}$ converge pour tout $t \in I =]-1, 1[$.*

Preuve. Pour tout n fixé, la série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m - t^{m+n}}{1 - t^m}$ est absolument convergente sur I (par comparaison avec la série géométrique de terme général $|t|^m$). La proposition 4.10.1 [1, p.157] permet de conclure. En fait,

Proposition 4 *La somme partielle d'ordre k de la série $1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_n(k)t^k$ est égale à la somme partielle d'ordre k du développement en série du produit fini*

$$\prod_{m=1}^k \frac{1 - t^{m+n}}{1 - t^m}.$$

Preuve. Pour le voir, il suffit de remarquer que dans le passage de k à $k + 1$ du développement en série entière du produit

$$\prod_{m=1}^k \frac{1 - t^{m+n}}{1 - t^m},$$

le développement de la fraction $\frac{1 - t^{k+n+1}}{1 - t^{k+1}}$ qui est de la forme

$$(1 + t^{k+n+1})(1 + t^{k+1} + \dots) = 1 + t^{k+1} + \dots$$

n'influe pas sur les k premiers termes du développement en série entière de la fraction

$$\prod_{m=1}^k \frac{1 - t^{m+n}}{1 - t^m}.$$

3.3 Factorisation de $\det(M_{[d,d]})$ dans $\mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$

L'objectif de ce paragraphe est de présenter une méthode qui permet d'exprimer $\det(M_{[d,d]})$ à l'aide des fonctions symétriques $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Pour arriver à cette fin, un réarrangement des facteurs du produit de l'expression (10) est nécessaire.

Pour cela, nous allons regrouper dans l'expression (10) les facteurs en les λ_i par orbites d'indices. D'où :

$$\det(M_{[d,d]}) = \prod_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_n = k \\ i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n \geq 0}} \left[\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathcal{O}(i_1, i_2, \dots, i_n)} (j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_n \lambda_n) \right].$$

Dans l'expression précédente, chaque crochet nous fournira un facteur irréductible (il y en a $p_n(k)$ facteurs) dans $\mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$. Voici quelques exemples de ces facteurs.

1. lorsque la partition de k est (k) , le facteur est :

$$\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathcal{O}(k, 0, \dots, 0)} (j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_n \lambda_n) = k^n \det(A);$$

2. si k est un multiple de n ($k = nl$), $(l)(l) \dots (l)$ est une partition de k et alors,

$$\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathcal{O}(l, l, \dots, l)} (j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_n \lambda_n) = l \text{Trace}(A);$$

3. si $k = u + (n-1)v$, $u < v$, la partition (v, v, \dots, v, u) correspond au facteur

$$\begin{aligned} & [u\lambda_1 + v(\lambda_2 + \dots + \lambda_n)][u\lambda_2 + v(\lambda_1 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n)] \dots [u\lambda_n + v(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})] \\ &= [(u-v)\lambda_1 + v \text{Trace}(A)][(u-v)\lambda_2 + v \text{Trace}(A)] \dots [(u-v)\lambda_n + v \text{Trace}(A)] \\ &= v^n [\text{Trace}(A)]^n + v^{n-1} (u-v) [\text{Trace}(A)]^{n-1} \sigma_1 + v^{n-2} (u-v)^2 [\text{Trace}(A)]^{n-2} \sigma_2 \\ & \quad + \dots + v(u-v)^{n-1} [\text{Trace}(A)] \sigma_{n-1} + (u-v)^n \sigma_n. \end{aligned}$$

Définition 2 On appelle longueur d'une orbite $\mathcal{O}(i_1, i_2, \dots, i_n)$ le nombre de ses éléments. Ce nombre est noté :

$$\#\mathcal{O}(i_1, i_2, \dots, i_n).$$

Deux orbites sont dites de même type si elles ont la même longueur.

Les longueurs d'orbites varient entre 1 (lorsque les n parts de la partition sont égales) et $n!$ (lorsque les n ou $n-1$ parts de la partition sont distinctes deux à deux). De manière générale,

Lemme 1 Soit $\tilde{k} = (k_1) \dots (k_1)(k_2) \dots (k_2)(k_l) \dots (k_l)$ une partition de k en $r = r_1 + r_2 + \dots + r_l$ parts tel que $r \leq n$. La longueur de l'orbite $\mathcal{O}(\tilde{k})$ est égale à

$$\#\mathcal{O}(\tilde{k}) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_l! (n-r)!}$$

On fait remarquer que $n-r$ correspond au nombre de zéros dans le multi-degré représenté par la partition \tilde{k} de k .

Proposition 5 L'expression

$$\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathcal{O}(i_1, i_2, \dots, i_n)} (j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_n \lambda_n)$$

est un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$.

Cela vient du fait que l'orbite, en tant qu'ensemble \mathfrak{S}_n -invariant, est minimal au sens de l'inclusion.

Maintenant que nous avons obtenu la factorisation du déterminant $\det(M_{[k,k]})$ en $p_n(k)$ facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, étudions la structure de chacun de ces facteurs qui dépend de la longueur de l'orbite.

Remarque 1 À la longueur l de l'orbite $\mathcal{O}(i_1, i_2, \dots, i_n)$ tel que $i_1 + i_2 + \dots + i_n = d$ correspond le type de facteur :

$$\prod_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathcal{O}(i_1, i_2, \dots, i_n)} (j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_n \lambda_n) = \sum_{\sum_{i=1}^n i \alpha_i = l} A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}(d) \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}.$$

À chaque orbite $\mathcal{O}(\tilde{k})$ de longueur $\sharp \mathcal{O}(\tilde{k})$ correspond un type de facteur $E_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}^j(k)$ de "degré" $\sharp \mathcal{O}(\tilde{k})$. Les zéros de ces facteurs sont les multi-degrés de longueur la valuation d de la série formelle cherchée. Il y a autant d'équations que de longueurs. À Chaque longueur, on associe une équation d'amorçage :

$$E_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}^j(k) = 0$$

en $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et à coefficients dans $\mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$.

On peut alors regrouper les résultats précédents en :

Théorème 1 *Le système différentiel (1) admet une intégrale première formelle si l'une des équations d'amorçage précédentes admet une solution.*

Remarque 2 *On sait que lorsqu'une série formelle F est une intégrale première de (1) alors, quelle que soit la fonction $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, différentiable, $\Phi \circ F$ est encore une intégrale première de (1). En particulier, si cette fonction Φ est la puissance k -ième. Par conséquent, tout facteur irréductible Ω (correspondant à l'orbite de (r_1, r_2, \dots, r_n) présent dans $\det(M_{[r, r]})$ se retrouvera dans $\det(M_{[lr, lr]})$ pour $l = 1, 2, \dots$. En effet, le facteur $(l\Omega)$ correspond à l'orbite de $(lr_1, lr_2, \dots, lr_n)$.*

Une conséquence de la remarque précédente est :

Remarque 3 *le déterminant de A (qui correspond au degré 1) est facteur de tous les déterminants $\det(M_{[r, r]})$.*

4 Cas des systèmes de dimensions 2 et 3

4.1 Cas des systèmes de dimension 2

Pour chaque degré d , il existe $\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)$ orbites $\mathcal{O}(d_1 d_2)$ telles que $d_1 + d_2 = d$. Ici $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. On distinguera deux types :

Premier type : $\mathcal{O}(d_1 d_2)$ est réduite à un singleton :

Nécessairement d est pair et $d_1 = d_2 = \frac{d}{2}$. Le facteur correspondant à l'orbite est :

$$\frac{d}{2} \text{Trace}(A).$$

Second type : $\mathcal{O}(d_1 d_2)$ contient deux éléments :

Évidemment, $d_1 \neq d_2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} (d_1 \lambda_1 + d_2 \lambda_2)(d_2 \lambda_1 + d_1 \lambda_2) &= d_1 d_2 \left((\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 \right) + \left((d_1)^2 + (d_2)^2 \right) (\lambda_1 \lambda_2) \\ &= d_1 d_2 \left(\lambda_1 + \lambda_2 \right)^2 + \left(d_1 - d_2 \right)^2 \left(\lambda_1 \lambda_2 \right) \\ &= d_1 d_2 \left(\text{Trace}(A) \right)^2 + \left(d_1 - d_2 \right)^2 \det(A). \end{aligned}$$

Ainsi, pour n'importe quel degré total d , nous pouvons prévoir et calculer les facteurs irréductibles de $\det(M_{[d,d]})$. Pour cela, on distinguera les cas où d est pair ou impair.

Théorème 2 Une condition nécessaire d'existence d'une intégrale formelle de valuation d pour le système (1) est :

1) Si d est impair

$$\prod_{\substack{d_1 + d_2 = d \\ d_1 > d_2}} \left[d_1 d_2 \left(\text{Trace}(A) \right)^2 + (d_1 - d_2)^2 \det(A) \right] = 0,$$

2) si d est pair :

$$\frac{d}{2} \text{Trace}(A) \prod_{\substack{d_1 + d_2 = d \\ d_1 > d_2}} \left[d_1 d_2 \left(\text{Trace}(A) \right)^2 + (d_1 - d_2)^2 \det(A) \right] = 0.$$

Corollaire 3 Une condition nécessaire d'existence d'une intégrale formelle réelle de valuation d pour le système (1) à coefficients réels est :

- 1) $\det(A) \leq 0$, si d est impair;
- 2) $\text{Trace}(A) = 0$ ou $\det(A) \leq 0$, si d est pair.

Grâce aux bases de Grobner (voir l'annexe 1), nous obtenons les expressions des premiers déterminants (où $\delta = \det(A) = \sigma_2$ et $J = \text{Trace}(A) = \sigma_1$) :

$$\begin{aligned} \det(M_{[2,2]}) &= 4 \delta J, \\ \det(M_{[3,3]}) &= 9 \delta (2 J^2 + \delta), \\ \det(M_{[4,4]}) &= 32 \delta J (4 \delta + 3 J^2), \\ \det(M_{[5,5]}) &= 25 \delta (\delta + 6 J^2) (9 \delta + 4 J^2), \\ \det(M_{[6,6]}) &= 432 \delta J (2 J^2 + \delta) (16 \delta + 5 J^2), \\ \det(M_{[7,7]}) &= 49 \delta (25 \delta + 6 J^2) (\delta + 12 J^2) (9 \delta + 10 J^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(M_{[8,8]}) &= 1024 \delta J (4 \delta + 3 J^2) (36 \delta + 7 J^2) (4 \delta + 15 J^2), \\
\det(M_{[9,9]}) &= 729 \delta (\delta + 20 J^2) (49 \delta + 8 J^2) (2 J^2 + \delta) (25 \delta + 14 J^2), \\
\det(M_{[10,10]}) &= 8000 \delta J (9 \delta + 4 J^2) (\delta + 6 J^2) (16 \delta + 21 J^2) (64 \delta + 9 J^2), \\
\det(M_{[11,11]}) &= 121 \delta (\delta + 30 J^2) (9 \delta + 28 J^2) (25 \delta + 24 J^2) (49 \delta + 18 J^2) \\
&\quad (81 \delta + 10 J^2), \\
\det(M_{[12,12]}) &= 497664 \delta J (100 \delta + 11 J^2) (2 J^2 + \delta) (4 \delta + 35 J^2) (16 \delta + 5 J^2) \\
&\quad (4 \delta + 3 J^2), \\
\det(M_{[13,13]}) &= 169 \delta (\delta + 42 J^2) (9 \delta + 40 J^2) (81 \delta + 22 J^2) (49 \delta + 30 J^2) \\
&\quad (121 \delta + 12 J^2) (25 \delta + 36 J^2), \\
\det(M_{[14,14]}) &= 87808 J \delta (64 \delta + 33 J^2) (25 \delta + 6 J^2) (9 \delta + 10 J^2) (\delta + 12 J^2) \\
&\quad (144 \delta + 13 J^2) (16 \delta + 45 J^2), \\
\det(M_{[15,15]}) &= 455625 \delta (2 J^2 + \delta) (\delta + 6 J^2) (9 \delta + 4 J^2) (49 \delta + 44 J^2) (\delta + 56 J^2) \\
&\quad (169 \delta + 14 J^2) (121 \delta + 26 J^2), \\
\det(M_{[16,16]}) &= 524288 J \delta (196 \delta + 15 J^2) (36 \delta + 7 J^2) (4 \delta + 15 J^2) (100 \delta + 39 J^2) \\
&\quad (4 \delta + 3 J^2) (4 \delta + 63 J^2) (36 \delta + 55 J^2).
\end{aligned}$$

4.2 Cas des systèmes de dimension 3

D'après l'étude générale, pour un degré donné d , nous avons trois types de décompositions en partitions (ou de facteurs) :

Premier type : $\mathcal{O}(d_1, d_2, d_3)$ est de longueur 1. Nécessairement d est un multiple de 3 et $d_1 = d_2 = d_3 = \frac{d}{3}$. Le facteur correspondant est évidemment

$$\frac{d}{3} \sigma_1.$$

Deuxième type : $\mathcal{O}(d_1, d_2, d_3)$ est de longueur 3. Dans ce cas :

$$d = 2d_1 + d_2 \quad \text{ou} \quad d = d_1 + 2d_2 \quad \text{avec} \quad d_1 > d_2.$$

Le facteur est

$$\begin{aligned}
&(d_1 - d_2)^3 \sigma_3 + d_1 d_2^2 \sigma_1^3 - d_2 (d_1 - d_2)^2 \sigma_2 \sigma_1 \quad \text{si} \quad d = 2d_1 + d_2 \\
&(d_2 - d_1)^3 \sigma_3 + d_2 d_1^2 \sigma_1^3 - d_1 (d_2 - d_1)^2 \sigma_2 \sigma_1 \quad \text{si} \quad d = d_1 + 2d_2.
\end{aligned}$$

Troisième type : $\mathcal{O}(d_1, d_2, d_3)$ est de longueur 6 et $d = d_1 + d_2 + d_3$, $d_1 > d_2 > d_3$. Le facteur correspondant est :

$$\begin{aligned}
&(d_1^2 - d_1 d_3 - d_2 d_1 - d_3 d_2 + d_3^2 + d_2^2)^3 \sigma_3^2 - (d_2 - d_3)^2 (d_1 - d_3)^2 (d_1 - d_2)^2 \sigma_2^3 + d_3^2 d_1^2 d_2^2 \sigma_1^6 \\
&+ (d_3 d_2^2 + d_1^2 d_2 - 3 d_3 d_2 d_1 + d_3^2 d_1) (d_1 d_2^2 - 3 d_3 d_2 d_1 + d_3 d_1^2 + d_3^2 d_2) \sigma_2^2 \sigma_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_3 d_2 d_1 (-6 d_3 d_2 d_1 + d_3 d_2^2 + d_3^2 d_1 + d_3 d_1^2 + d_1^2 d_2 + d_1 d_2^2 + d_3^2 d_2) \sigma_2 \sigma_1^4 \\
& -(d_2^3 d_1 + d_2^3 d_3 - 4 d_2^2 d_1^2 - 4 d_3^2 d_2^2 + 2 d_1 d_3 d_2^2 + 2 d_1 d_3^2 d_2 + 2 d_1^2 d_3 d_2 + d_3^3 d_2 + d_2 d_1^3 - 4 d_3^2 d_1^2 + \\
& \quad + d_3^3 d_1 + d_3 d_1^3) (d_1^2 - d_1 d_3 - d_2 d_1 - d_3 d_2 + d_3^2 + d_2^2) \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\
& + (-2 d_3^3 d_1^3 - 2 d_3^3 d_2^3 - 2 d_2^3 d_1^3 - d_2^3 d_3 d_1^2 - d_3^3 d_1 d_2^2 - d_2^2 d_3 d_1^3 - d_3^2 d_2^3 d_1 - d_3^3 d_1^2 d_2 + d_3^2 d_2^4 + \\
& \quad + d_2^4 d_1^2 + d_3^4 d_2^2 + d_3^2 d_1^4 + 6 d_2^3 d_1^2 d_2^2 + d_3^4 d_1^2 - d_3^2 d_1^3 d_2 + d_1^4 d_2^2) \sigma_3 \sigma_1^3
\end{aligned}$$

En utilisant la réduction selon la base de Grobner, on obtient :

$$\det(M_{[1,1]}) = \sigma_3$$

$$\det(M_{[2,2]}) = -8 \sigma_3 (\sigma_3 + \sigma_2 \sigma_1),$$

$$\det(M_{[3,3]}) = -27 \sigma_3 \sigma_1 (-27 \sigma_3^2 - 18 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 - 4 \sigma_3 \sigma_1^3 + 4 \sigma_2^2 - 8 \sigma_2^2 \sigma_1^2),$$

$$\det(M_{[4,4]}) = -512 \sigma_3 (\sigma_3 + \sigma_2 \sigma_1) (-\sigma_3 + \sigma_2 \sigma_1 - 2 \sigma_1^3) \\ (36 \sigma_2^3 - 343 \sigma_3^2 - 42 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 - 27 \sigma_2^2 \sigma_1^2 - 36 \sigma_3 \sigma_1^3),$$

$$\det(M_{[5,5]}) = 125 \sigma_3 (\sigma_3 - 4 \sigma_1^3 + 2 \sigma_2 \sigma_1) (-8 \sigma_3 - 3 \sigma_1^3 + 4 \sigma_2 \sigma_1) \\ (-2197 \sigma_3^2 - 144 \sigma_3 \sigma_1^3 + 52 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 - 64 \sigma_2^2 \sigma_1^2 + 144 \sigma_2^2) \\ (-343 \sigma_3^2 - 36 \sigma_3 \sigma_1^3 - 462 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 - 216 \sigma_2^2 \sigma_1^2 + 36 \sigma_2^2),$$

$$\det(M_{[6,6]}) = -746496 \sigma_3 \sigma_1 (\sigma_3 + \sigma_2 \sigma_1) (-27 \sigma_3 - 4 \sigma_1^3 + 9 \sigma_2 \sigma_1) \\ (-27 \sigma_3^2 - 18 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 - 4 \sigma_3 \sigma_1^3 + 4 \sigma_2^2 - 8 \sigma_2^2 \sigma_1^2) \\ (-9261 \sigma_3^2 - 400 \sigma_3 \sigma_1^3 + 630 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 - 125 \sigma_2^2 \sigma_1^2 + 400 \sigma_2^2) \\ (-27 \sigma_3^2 - 4 \sigma_3 \sigma_1^3 - 36 \sigma_1^6 - 18 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 + 72 \sigma_2 \sigma_1^4 - 35 \sigma_2^2 \sigma_1^2 + 4 \sigma_2^3).$$

4.3 Cas général

Dans ce qui suit, on présente un algorithme de construction des équations d'amorçage de degré total d d'un système différentiel polynomial de valuation 1 défini sur \mathbb{K}^n .

Étape 1 Calculer toutes les partitions de l'entier d en au plus n parts

Étape 2 Répartir les orbites associées aux partitions selon leurs longueurs.

Cela donne les types d'orbites.

Étape 3 Pour chaque longueur d'orbite, écrire l'équation d'amorçage en les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Étape 4 En utilisant les bases de Grobner, réduire ces équations dans $\mathbb{K}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$.

5 Annexes

5.1 Annexe 1 : systèmes différentiels de dimension 2 et de degré 3

La procédure qui génère des polynômes à deux variables x et y , de valuation 1 et d'un degré donné m , est :

```

PolHom := proc(m, f)
local i; global x, y; add(f_{m-j,j} * x^{(m-j)} * y^j, j = 0..m); end proc.

```

L'image de la série formelle $f(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} f_{i,j} x^i y^j$, tronquée à l'ordre d , par l'opérateur Δ_P est obtenue par degré d'homogénéité à l'aide de la procédure suivante :

```

EqIntHom := proc( $m, d, a, b, f$ )
local  $i, j, F1, F2, F3$ ;   global  $P, F$ ;
   $P := \text{vector}(2)$ ;       $F := \text{vector}(d + m - 1)$ ;
   $P_1 := \text{add}(\text{PolHom}(i, a), i = 1..m)$ ;    $P_2 := \text{add}(\text{PolHom}(i, b), i = 1..m)$ ;
   $F1 := \text{add}(\text{PolHom}(i, f), i = 1..d)$ ;
   $F2 := \text{collect}(\text{diff}(F1, x) * P_1 + \text{diff}(F1, y) * P_2, [x, y], \text{distributed})$ ;
   $F3 := \text{convert}(F2, \text{'list'})$ ;
  for  $j$  to  $d + m - 1$  do
     $F_j := 0$ ;
    for  $i$  to  $\text{nops}(F3)$  do
      if  $\text{degree}(F3_i, [x, y]) = j$  then  $F_j := F_j + F3_i$  else next end if
    end do;
     $F2 := \text{collect}(F2 - F_j, [x, y], \text{distributed})$ ;
     $F3 := \text{convert}(F2, \text{'list'})$ 
  end do;
   $\text{add}(F_j, j = 1..d + m - 1)$ 
end proc

```

L'exécution de l'instruction $\text{EqIntHom}(3, 10, a, b, f)$, permet d'obtenir tous les F_l pour $l = 1, \dots, 10$ et dont la somme donne $\Delta_P(f)$. La procédure EcrMat suivante permet de calculer les matrices $M_{[i,k]}$

```

EcrMat := proc( $m, d, a, b, f$ )
local  $i, jl, jc, k, F1, F2, F3$ ;
global  $P, F, M, L$ ;
  EqIntHom( $m, d, a, b, f$ );
  for  $k$  to  $d + m - 1$  do
    for  $i$  from  $k - \min(k, m) + 1$  to  $k$  do
       $M_{i,k} := \text{matrix}(i + 1, k + 1)$ ;
      for  $jc$  to  $k$  dofor  $jl$  to  $i + 1$  do
         $M_{i,k,jl,jc} := \text{coeff}(\text{subs}(y = 1, \text{coeff}(F_k, x^{(k-jc+1)})), f_{i-jl+1,jl-1})$ 
      end do
    end do;
    for  $jl$  to  $i + 1$  do  $M_{i,k,jl,k+1} := \text{coeff}(\text{coeff}(F_k, y^k), f_{i-jl+1,jl-1})$ 
  end do

```

```

    end do
  end do;
  Lk := seq(evalm(Mi,k), i = k - min(k, m) + 1..k)
  end do
end proc

```

Le problème consiste à exprimer les déterminants des matrices $M_{[d,d]}$ à l'aide de la trace et du déterminant de la matrice A . Pour cela on utilise les bases de Grobner ([3]).

$$GL := [a[1, 0] * b[0, 1] - b[1, 0] * a[0, 1] - \text{delta}, a[1, 0] + b[0, 1] - J];$$

$$GBL := \text{gbasis}(GL, \text{plex}(a[1, 0], a[0, 1], b[1, 0], b[0, 1], \text{delta}, J));$$

$$GL := [a[1, 0] * b[0, 1] - b[1, 0] * a[0, 1] - \text{delta}, a[1, 0] + b[0, 1] - J];$$

$$GL := [a_{1,0} b_{0,1} - b_{1,0} a_{0,1} - \delta, a_{1,0} + b_{0,1} - J].$$

$$GBL := [b[0, 1]^2 - b[0, 1] * J + b[1, 0] * a[0, 1] + \text{delta}, a[1, 0] + b[0, 1] - J];$$

$$GBL := [b_{0,1}^2 - b_{0,1} J + b_{1,0} a_{0,1} + \delta, a_{1,0} + b_{0,1} - J]$$

```

for i from 1 to 20 do

```

```

  factor(normal f(det(evalm(M[i,i]))), GBL, plex(a[1, 0], a[0, 1], b[1, 0], b[0, 1], delta, J));

```

```

od;

```

La commande ci-dessus permet de décomposer $\det M_{[d,d]}$ pour $d = 1, \dots, 20$.

5.2 Annexe 2 : systèmes différentiels de dimension 3 et de degré 2

Commençons par introduire la fonction qui génère les fonctions polynomiales homogènes de degré m en les coefficients f et variables x , y et z .

```

PolHomT := proc(m, f)

```

```

  local i, SS;  global x, y, z, ff;

```

```

  ff := collect(add(add(fm-k,k-j,jx(m-k)y(k-j)zj, j = 0..k), k = 0..m), [x, y, z], distributed)

```

```

end proc

```

Cette fonction nous permet d'écrire le système différentiel de dimension 3 et de degré 2.

L'image d'un développement en série entière tronqué à l'ordre k par l'opérateur Δ_P est donnée par la procédure suivante :

```

EqIntT := proc( $m, k, a, b, c, f$ )
local  $i$ ;
global  $P, F$ ;
   $P := \text{vector}(3)$ ;
   $P_1 := \text{add}(\text{PolHomT}(i, a), i = 1..m)$ ;
   $P_2 := \text{add}(\text{PolHomT}(i, b), i = 1..m)$ ;
   $P_3 := \text{add}(\text{PolHomT}(i, c), i = 1..m)$ ;
   $F := \text{add}(\text{PolHomT}(i, f), i = 1..k)$ ;
   $\text{collect}(\text{diff}(F, x) * P_1 + \text{diff}(F, y) * P_2 + \text{diff}(F, z) * P_3, [x, y, z], \text{distributed})$ 
end proc

```

Les conditions d'amorçage d'une intégrale première sont données par la nullité des parties homogènes de la fonction $\Delta_P(f)$:

```

EqIntHomT := proc( $m, d, a, b, c, f$ )
local  $i, j, F1, F2, F3, dd$ ;
global  $P, F$ ;
   $P := \text{vector}(3)$ ;
   $F := \text{vector}(d + m - 1)$ ;
   $P_1 := \text{add}(\text{PolHomT}(i, a), i = 1..m)$ ;
   $P_2 := \text{add}(\text{PolHomT}(i, b), i = 1..m)$ ;
   $P_3 := \text{add}(\text{PolHomT}(i, c), i = 1..m)$ ;
   $F1 := \text{add}(\text{PolHomT}(i, f), i = 1..d)$ ;
   $F2 := \text{collect}(\text{diff}(F1, x) * P_1 + \text{diff}(F1, y) * P_2 + \text{diff}(F1, z) * P_3, [x, y, z], \text{distributed})$ ;
   $F3 := \text{convert}(F2, 'list')$ ;
  for  $j$  to  $d + m - 1$  do
     $F_j := 0$ ;
    for  $i$  to  $\text{nops}(F3)$  do
      if  $\text{degree}(F3_i, [x, y, z]) = j$  then  $F_j := F_j + F3_i$  else next end if
    end do;
     $F2 := \text{collect}(F2 - F_j, [x, y, z], \text{distributed})$ ;
     $F3 := \text{convert}(F2, 'list')$ 
  end do;
   $\text{add}(F_j, j = 1..d + m - 1)$ 
end proc

```

Ainsi $\text{EqIntHomT}(2, 3, a, b, c, f)$ nous donne les expressions des trois premières parties homogènes de $\Delta_P(f)$.

Vient ensuite l'étape d'associer à ces équations en les coefficients f les matrices qui nous facilitent l'analyse et l'obtention des conditions d'amorçage de l'intégrabilité formelle :

```

    EcrMatT := proc( $m, d, a, b, c, f$ )
local  $k, i, l, cc, r1, r2, r3, lx, ly, lz$ ;
global  $P, F, M, L$ ;
    EqIntHomT( $m, d, a, b, c, f$ );
    for  $k$  to  $d + m - 1$  dofor  $i$  from  $k - \min(k, m) + 1$  to  $k$  do
         $M_{i,k} := \text{matrix}(1/2 * (i + 2) * (i + 1), 1/2 * (k + 2) * (k + 1))$ 
    end do
end do;
    for  $k$  to  $d + m - 1$  do
        for  $i$  from  $k - \min(k, m) + 1$  to  $k$  do
             $cc := 1$ ;
            for  $lx$  from  $k$  by  $-1$  to  $0$  dofor  $ly$  from  $k - lx$  by  $-1$  to  $0$  do
                 $l := 1$ ;
                for  $r1$  from  $i$  by  $-1$  to  $0$  dofor  $r2$  from  $i - r1$  by  $-1$  to  $0$  do
                     $M_{i,k,l,cc} :=$ 
                     $\text{coeff}(\text{coeff}(\text{coeff}(\text{coeff}(F_k, x, lx), y, ly), z, k - lx - ly), f_{r1,r2,i-r1-r2});$ 
                     $l := l + 1$ 
                end do
            end do;
             $cc := cc + 1$ 
        end do
    end do
     $L_k := \text{seq}(\text{evalm}(M_{i,k}), i = k - \min(k, m) + 1..k)$ 
end do
end proc

```

Comme dans le cas de la dimension deux, pour exprimer les déterminants des différentes matrices carrées à l'aide des coefficients du polynôme caractéristique, on utilise les bases de Grobner.

$$SysVP := [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \delta, \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_2 + \sigma_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sigma_1]$$

$$GSysVP := [-\delta - \lambda_3 \sigma_2 + \lambda_3^3 - \lambda_3^2 \sigma_1, -\sigma_2 + \lambda_2^2 - \lambda_2 \sigma_1 + \lambda_3 \lambda_2 + \lambda_3^2 - \lambda_3 \sigma_1, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \sigma_1]$$

Références

- [1] É. AMAR, É. MATHERON, analyse complexe, *Editions Cassini*.
- [2] G.E. ANDREWS, The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and its applications, volume 2, *Addison-Wesley Publishing Company*, 1976.
- [3] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, Ideals, Varieties and Algorithms, *Springer-Verlag*, 1992.
- [4] A. MACIEJEWSKI, J.M. OLLAGNIER, A. NOWICKI, Generic polynomial vector fields are not integrable, October 2002, to be published in *Indagationes Mathematicae*.
- [5] J.M. OLLAGNIER, Liouvillian Integration of the lotka-Volterra System, *Qualitative Theory of Dynamical Systems* **3** (2002), 19-28.
- [6] L. PONTRIAGUINE, Équations différentielles ordinaires, *Éditions Mir - Moscou*, 1975.
- [7] M. F. SINGER, Liouvillian First Integral of Differential Equations, *Transactions of the AMS*, **333**(2), October 1992, 673-688.
- [8] H. WEYL, The Classical Groups, Their Invariants and Representations. *Princeton* 1939.