



**Laboratoire d'Arithmétique,
Calcul formel et d'Optimisation**



UMR CNRS 6090

Sur un problème de S. Ramanujan

AbdelHakim Smati

Rapport de recherche n° 2004-08
Déposé le 7 septembre 2004

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

Tél. (33) 5 55 45 73 23 - Fax. (33) 5 55 45 73 22 - laco@unilim.fr
<http://www.unilim.fr/laco/>

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

Tél. (33) 5 55 45 73 23 - Fax. (33) 5 55 45 73 22 - laco@unilim.fr
<http://www.unilim.fr/laco/>

Sur un problème de S. Ramanujan

Abdelhakim Smati *

Laco, UMR-CNRS 6090, Université de Limoges, 123 Avenue Albert Thomas 87060 Limoges cedex, France

À Jean-Louis Nicolas, en toute amitié.

Résumé

En 1915, Srinivasa Ramanujan donne une borne inférieure de l'ordre maximum de la fonction itérée du nombre des diviseurs, $d(d(n))$. En 1989, Paul Erdős et Aleksandar Ivić en donnent une borne supérieure. Dans cette note, on détermine l'ordre maximum de $\omega(d(n))$, nombre de diviseurs premiers de $d(n)$, et on en déduit une amélioration du résultat d'Erdős et Ivić sur l'ordre maximum de $d(d(n))$.

Abstract

On a problem by S. Ramanujan. In 1915, Srinivasa Ramanujan gives a lower limit for the maximum order of the iterated of the divisors function, $d(d(n))$. In 1989, Paul Erdős and Aleksandar Ivić give an upper bound. In this note, we find the maximal order of the function $\omega(d(n))$, number of prime divisors of $d(n)$, and we improve the result of Erdős and Ivić on the maximal order of $d(d(n))$.

1 Introduction

Dans les dernières lignes de son long article de 1915, intitulé "Highly composite numbers", Ramanujan [4] et [5] (No.15), donne une borne inférieure de l'ordre maximum de la fonction itérée du nombre des diviseurs, $d(d(n))$, posant ainsi, implicitement, le problème de l'étude de l'ordre maximum de cette fonction. De façon précise, il énonce que pour $N_k = 2^{2-1} 3^{3-1} \dots p_k^{p_k-1}$ où pour $k \geq 1$, p_k désigne le k -ième nombre premier,

$$d(d(N_k)) > 4^{\frac{\sqrt{2 \log N_k}}{\log \log N_k}}.$$

L'article de Ramanujan est d'abord consacré à l'étude de l'ordre maximum de la fonction $d(n)$, nombre de diviseurs de l'entier naturel n . Pour cela, Ramanujan a introduit la notion de nombres hautement composés - un nombre est hautement composé, s'il possède plus de diviseurs que tout entier le précédant - notion féconde par les développements auxquels elle a donné lieu

*adresse E-mail: smati@unilim.fr

par la suite et par les problèmes intéressants qu'elle soulève. On pourra consulter à ce sujet l'article [3] d'exposition de Jean-Louis Nicolas dans lequel on trouvera une analyse de l'article de Ramanujan et une description des développements qu'il a inspiré par la suite sous l'impulsion, notamment, de P. Erdős. Ramanujan a fait une étude approfondie des nombres hautement composés et a considérablement amélioré les résultats de Wigert [7] sur l'ordre maximum de $d(n)$. Cependant, à travers son article, mais à l'arrière-plan, transparait l'étude de la fonction $d(d(n))$. Il donne, dans une table, les 103 premiers entiers hautement composés N , et à côté des valeurs numériques de $d(N)$, celles de $d(d(N))$. Il détermine également l'ordre de grandeur de $d(d(N))$ sur la suite des nombres hautement composés en montrant que, pour N hautement composé,

$$d(d(N)) = (\log N)^{\frac{1}{\log 2}} \left(\log \log \log \log N + \gamma + O\left(\frac{1}{\log \log \log N}\right) \right)$$

où γ étant la constante d'Euler.

Les premiers à revenir à ce problème furent P. Erdős et I. Kátai [2]. En 1969, ils posent le problème de façon générale, c'est-à-dire celui de la détermination de l'ordre maximum de la k -ième itérée de la fonction nombre des diviseurs et en donnent un premier résultat. Enfin, en 1989, P. Erdős et A. Ivić [1] étudient de nouveau la fonction $d(d(n))$ et montrent que, pour une constante $c > 0$ convenable et n assez grand,

$$d(d(n)) < e^c \sqrt{\log n} \sqrt{\frac{\log \log n}{\log \log \log n}}. \quad (1)$$

Notons par $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de l'entier n . Dans cette note, on détermine l'ordre maximum de $\omega(d(n))$, c'est un résultat nouveau (cf. théorème 2.1, ci-dessous) et on donne une amélioration du résultat (1) d'Erdős et Ivić (cf. théorème 2.2, ci-dessous). Notre méthode est fondée sur un raffinement de la méthode d'Erdős et Kátai [2] combiné à une bonne majoration de $d(n)$ en termes de $\omega(n)$. L'étude du cas général est nettement plus compliquée. Elle est l'objet d'un autre article [6] dans lequel nous avons amélioré le résultat d'Erdős et Kátai.

2 Les résultats

Théorème 2.1 *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement.*

1. *On a, pour n suffisamment grand,*

$$\omega(d(n)) \leq (1 + \epsilon) 3\sqrt{192} \frac{\sqrt{\log n}}{\log \log n}.$$

2. *Il existe une infinité d'entiers n tels que*

$$\omega(d(n)) \geq (1 - \epsilon) \frac{\sqrt{\log n}}{\log \log n}.$$

Théorème 2.2 *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement.*

1. *On a, pour n suffisamment grand,*

$$d(d(n)) \leq 3 e^{(1+\epsilon) 3\sqrt{192}} \sqrt{\log n}.$$

2. *Il existe une infinité d'entiers n tels que*

$$d(d(n)) \geq e^{(1-\epsilon) \log 2} \frac{\sqrt{\log n}}{\log \log n}.$$

3 Les lemmes

lemme 3.1 Soit $\epsilon > 0$ et N_1 un entier naturel. Posons $S_1 = \omega(N_1)$. Pour S_1 assez grand, N_1 possède au moins $[S_1/2]$ diviseurs premiers supérieurs à

$$\frac{1}{2}(1 - \epsilon)S_1 \log S_1.$$

lemme 3.2 Soit $\epsilon > 0$ et N_1 un entier naturel. Posons $S_1 = \omega(N_1)$. Il existe un entier naturel $M_1 : M_1 | N_1$ et dont la décomposition en facteurs premiers, $M_1 = Q_1^{\gamma_1-1} Q_2^{\gamma_2-1} \dots Q_A^{\gamma_A-1}$, possède, pour S_1 assez grand, les propriétés suivantes

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} A \geq \frac{1}{3} S_1 \\ Q_i \geq \frac{1}{2} (1 - \epsilon) S_1 \log S_1, \quad (i = 1, 2, \dots, A) \\ \gamma_i \geq 2. \quad (i = 1, 2, \dots, A). \end{array} \right.$$

lemme 3.3 Pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$d(n) \leq 3 e^{\omega(n) \log \log n}.$$

lemme 3.4 Soit $n \geq 2$ un entiers arbitraire. Posons $N_2 = n$ et $N_1 = d(N_2)$. Notons $S_1 = \omega(N_1)$. Pour S_1 assez grand, on a l'une ou l'autre des assertions suivantes :

1.

$$\log N_2 \geq (S_1 (\log S_1)^2)^2;$$

2. Il existe un entier naturel $M_2 : M_2 | N_2$ et dont la décomposition en facteurs premiers, $M_2 = R_1^{\beta_1-1} R_2^{\beta_2-1} \dots R_B^{\beta_B-1}$, possède, pour S_1 assez grand, les propriétés suivantes

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} B \geq \frac{1}{12} S_1 \\ R_i \geq \frac{1}{24} (1 - \epsilon) S_1 \log S_1 \\ \beta_i \geq \frac{1}{2} (1 - \epsilon) S_1 \log S_1. \end{array} \right.$$

Références

- [1] P. ERDŐS, A. Ivić, On the iterates of the enumerating function of finite abelian groups, Bulletin Acad. Serbe, Sciences Mathématiques, No. 17, (1989), pp.13-22.
- [2] P. ERDŐS, I. Kátai, On the growth of $d_k(n)$, Fibonacci Quart. 7, (1969), pp. 267-274.
- [3] J.-L. Nicolas, On highly composite numbers, in : Eds. by G.E. Andrews and al., Ramanujan Revisited, Proceedings of the Centenary Conference, University of Illinois 1987, 215-244.
- [4] S. RAMANUJAN, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. serie 2, 14, (1915), pp. 347-409.
- [5] S. RAMANUJAN Collected papers, Chelsea, 2nd edition 1962.
- [6] A. SMATI, Sur un problème d'Erdős et Kátai, Prépublication.
- [7] S. WIGERT, Sur l'ordre de grandeur du nombre de diviseurs d'un entier, Arkiv för Matematik, vol. 3, no. 18, (1907) pp. 1-9.