



**Laboratoire d'Arithmétique,  
Calcul formel et d'Optimisation**



**UMR CNRS 6090**

## Le nombre des diviseurs d'un entier dans les progressions arithmétiques

**Abdallah Derbal  
Abdelhakim Smati**

Rapport de recherche n° 2004-02  
Déposé le 11 mai 2004

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

Tél. (33) 5 55 45 73 23 - Fax. (33) 5 55 45 73 22 - laco@unilim.fr  
<http://www.unilim.fr/laco/>

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

Tél. (33) 5 55 45 73 23 - Fax. (33) 5 55 45 73 22 - [laco@unilim.fr](mailto:laco@unilim.fr)  
<http://www.unilim.fr/laco/>

(Note abrégée à paraître aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris)

# Le nombre des diviseurs d'un entier dans les progressions arithmétiques<sup>\*</sup>

Abdallah Derbal<sup>a</sup>, Abdelhakim Smati<sup>b</sup><sup>a</sup> Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, B.P. 92, Vieux Kouba, Alger, Algérie<sup>b</sup> Laco, UMR-CNRS 6090, Université de Limoges, 123 Avenue Albert Thomas 87060 Limoges cedex, France

## Résumé

Soit  $d_{k,\ell}(n)$  la fonction nombre des diviseurs de l'entier naturel  $n \geq 1$ , dans les progressions arithmétiques  $\{\ell + mk\}$  avec  $1 \leq \ell \leq k$  et  $\ell, k$  premiers entre-eux et soit  $F(n; k, \ell)$  définie en (1) ci-dessous. Dans cette note, nous étudions et donnons la structure des nombres  $d_{k,\ell}$ -hautement composés supérieurs qui généralisent ceux définis par S. Ramanujan [3]. Nous prouvons que le maximum absolu de  $F(n, k, \ell)$  est atteint sur ces nombres et nous le donnons explicitement pour  $k = 2, \dots, 13$ ; généralisant ainsi l'étude faite dans [2] pour  $k = 1$ .

## Abstract

**The number of divisors of an integer in arithmetic progressions.** Let  $d_{k,\ell}(n)$  be the function number of divisors of the integer  $n \geq 1$ , in arithmetic progressions  $\{\ell + mk\}$  with  $1 \leq \ell \leq k$  and  $\ell, k$  are coprime and let  $F(n; k, \ell)$  defined in (1) below. In this note, we study and give the structure of numbers  $d_{k,\ell}$ -superior highly composite which generalize the ones defined by S. Ramanujan [3]. We prove that  $F(n, k, \ell)$  reaches its maximum among these numbers. We give it explicitly for  $k = 2, \dots, 13$ . This generalizes, the study in [2], in which  $k = 1$  is treated.

## 1 Introduction

Soient  $k$  et  $\ell$  des entiers naturels tels que  $1 \leq \ell \leq k$  et  $(k, \ell) = 1$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note par  $d_{k,\ell}(n)$  le nombre des diviseurs de  $n$  dans la progression arithmétique  $\{km + \ell\}$ .  $d_{k,\ell}(n)$  est une fonction arithmétique multiplicative, définie par

$$d_{k,\ell}(n) = \prod_{p^\alpha \parallel n, p \equiv \ell(k)} (\alpha + 1), \quad (n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha)$$

où  $p$  est un nombre premier générique.  $d_{1,1}(n) = d(n)$  est le nombre des diviseurs de  $n$ . Posons

$$F(n; k, \ell) = \frac{\ln d_{k,\ell}(n) \ln(\varphi(k) \ln n)}{\ln 2 \ln n} \quad (1)$$

---

<sup>\*</sup>adresses E-mail: abderbal@yahoo.fr (A.Derbal), smati@unilim.fr (A.Smati)

où  $\varphi(k)$  est l'indicateur d'Euler. D'après [2], le maximum absolu de la fonction  $F(n; 1, 1)$  est atteint au nombre hautement composé supérieur (h.c.s.)  $n = 6983776800$ , et vaut 1.5379. Dans cette note nous étudions les fonctions  $d_{k,\ell}(n)$  et  $F(n; k, \ell)$ . Nous obtenons les résultats suivants :

**Théorème 1.1** 1. On a

$$\limsup F(n; k, \ell) = 1$$

et il existe une infinité de nombres  $d_{k,\ell}$ -h.c.s.  $N$  tels que  $F(N; k, \ell) > 1$ .

2. La fonction  $F(n; k, \ell)$  atteint son maximum absolu en un nombre  $d_{k,\ell}$ -h.c.s.

3. Pour  $k = 1, 2, \dots, 13$ , le maximum  $\lambda(k)$  de  $F(n, k, \ell)$  est donné dans la table 3, au paragraphe 3.

la définition et la structure des nombres  $d_{k,\ell}$ -h.c.s. sont données dans le paragraphe 2, où nous suivons la méthode de Ramanujan. La notion de nombres hautement composés et hautement composés supérieurs fut introduite pour la première fois par S. Ramanujan dans son article de 1915 "Highly composite numbers" [3] et développée, par de nombreux auteurs dont L. Alaoglu, P. Erdős, J.-L. Nicolas (voir l'article de synthèse de J.-L. Nicolas [1] pour davantage d'informations et une abondante bibliographie sur le sujet). Dans son étude de l'ordre maximum de la fonction  $d(n)$ , S. Ramanujan a développé des idées susceptibles de généralisation à d'autres fonctions arithmétiques. Son idée majeure est la mise en évidence d'une suite d'entiers attachée à  $d(n)$ , qualifiés d'entiers hautement composés - ce sont les entiers qui ont plus de diviseurs que tout entier les précédant- et d'une suite d'entiers, dits hautement composés supérieurs, qui lui ont permis d'obtenir en particulier, l'ordre maximum de la fonction  $d(n)$ . Bien entendu, la portée de l'article de Ramanujan va bien au-delà de l'étude de l'ordre maximum de  $d(n)$ , dans la mesure où la structure fine des nombres hautement composés a été étudiée et que de nombreux problèmes intéressants et difficiles les concernant, notamment de leur répartition, restent ouverts malgré les études importantes qui suivirent durant de nombreuses décennies.

## 2 Les nombres $d_{k,\ell}$ -hautement composés supérieurs

**lemme 2.1 (et définition)** Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un unique nombre  $N = N_{k,\ell,\epsilon}$  vérifiant

$$\frac{d_{k,\ell}(n)}{n^\epsilon} \leq \frac{d_{k,\ell}(N)}{N^\epsilon} \quad \text{pour } n \leq N \quad \text{et} \quad \frac{d_{k,\ell}(n)}{n^\epsilon} < \frac{d_{k,\ell}(N)}{N^\epsilon} \quad \text{pour } n > N.$$

Ce nombre est appelé  $d_{k,\ell}$ -hautement composé supérieur associé à  $\epsilon$ .

**Démonstration.** La limite de la fonction  $d_{k,\ell}(n)/n^\epsilon$  étant nulle, elle atteint son maximum en un nombre fini d'entiers.  $N$  en est alors le plus grand.

**lemme 2.2 (et définition)** Pour tout entier  $\alpha \geq 1$  et pour tout réel  $x > 1$ , on pose

$$H(x, \alpha) = \frac{\ln(1 + 1/\alpha)}{\ln x}.$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , l'équation  $H(x, \alpha) = \epsilon$  possède une unique racine  $x_\alpha > 1$ . On définit ainsi une suite  $(x_\alpha)_{\alpha \geq 1}$  dans  $]1, +\infty[$ . On pose  $x_1 = x$ . La suite  $(x_\alpha)_{\alpha \geq 1}$  est strictement décroissante et vérifie les propriétés :

$$x_2 > \sqrt{2x} \quad \text{pour } x \geq 60, \quad x_\alpha = x^{v(\alpha)} \quad \text{où } v(\alpha) = \frac{\ln(1 + 1/\alpha)}{\ln 2} \quad \text{et } x^{1/\alpha} < x_\alpha < x^{1/\alpha \ln 2}.$$

**lemme 2.3** Soient  $\epsilon > 0$ ,  $N = N_{k,\ell,\epsilon}$  le nombre  $d_{k,\ell}$ -h.c.s. associé à  $\epsilon$ , et  $p_1 = p_1(k, \ell)$  le premier nombre premier congru à  $\ell$  modulo  $k$ .

1. Tout diviseur premier  $p$  de  $N$ , d'exposant  $\alpha \geq 1$ , est congru à  $\ell$  modulo  $k$  et vérifie

$$H(p, \alpha + 1) < \epsilon \leq H(p, \alpha) \quad \text{et} \quad x_{\alpha+1} < p \leq x_\alpha.$$

2. Si  $\epsilon > \epsilon_1 = H(p_1, 1)$  alors  $N_{k,\ell,\epsilon} = 1$ .

**lemme 2.4** Soit  $p$  un nombre premier,  $p \equiv \ell(k)$ . On pose  $E_p = \{H(p, \alpha), \alpha \geq 1\}$  et on note  $E$  la réunion de tous les ensembles  $E_p$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de  $E$  supérieurs à  $\epsilon$ . On range les éléments de  $E$  en une suite décroissantes  $\epsilon_1 = H(p_1, 1) > \epsilon_2 > \dots$ .

1. Soient  $\epsilon_i$  et  $\epsilon_{i+1}$  deux éléments consécutifs de  $E$ . Pour tout  $\epsilon > 0$  tel que  $\epsilon_{i+1} < \epsilon < \epsilon_i$ , on a  $N_{k,\ell,\epsilon} = N_{k,\ell,\epsilon_i}$ .

2. L'ensemble de  $d_{k,\ell}$ -nombre hautement composé supérieurs est

$$\{1\} \cup \{N_{k,\ell,\epsilon_i}/\epsilon_i \in E\} \quad \text{et on a} \quad 1 < N_{k,\ell,\epsilon_1} < N_{k,\ell,\epsilon_2} < \dots$$

3. Soit  $x$  défini par  $H(x, 1) = \epsilon$ . On a alors

$$N = N_{k,\ell,\epsilon} = \prod_{p \equiv \ell(k), x_2 < p \leq x} p \prod_{p \equiv \ell(k), x_3 < p \leq x_2} p^2 \dots \prod_{p \equiv \ell(k), x_{m+1} < p \leq x_m} p^m$$

où  $m$  est le plus grand indice tel que  $x_{m+1} < p_1 \leq x_m$ ; Il est égal à la partie entière de  $1/(p_1^\epsilon - 1)$  et est équivalent à  $\ln x / \ln 2 \ln p_1$ , ( $x \rightarrow +\infty$ ).

**Remarque 2.1** Voici, à titre d'exemples, les premiers nombres  $d_{k,\ell}$ -h.c.s. pour  $k = 3$  et  $\ell = 2$ .

$\epsilon$	$N_\epsilon$	$d_{3,2}(N_\epsilon)$	$F(N_\epsilon; 3, 2)$
$\epsilon > \epsilon_1 = H(2, 1) = 1$	1	1	indéfinie
$\epsilon_1 \geq \epsilon > \epsilon_2 = 0.584962\dots$	2	2	0.471233...
$\epsilon_2 \geq \epsilon > \epsilon_3 = 0.430678\dots$	$2^2$	3	1.165925...
$\epsilon_3 \geq \epsilon > \epsilon_4 = 0.415037\dots$	$2^2 \times 5$	6	1.544848...
$\epsilon_4 \geq \epsilon > \epsilon_5 = 0.321928\dots$	$2^3 \times 5$	8	1.625265...
$\epsilon_5 \geq \epsilon > \epsilon_6 = 0.289064\dots$	$2^5 \times 5$	10	1.645533...
$\epsilon_6 \geq \epsilon > \epsilon_7 = 0.263034\dots$	$2^4 \times 5.11$	20	1.661929...
$\epsilon_7 \geq \epsilon > \epsilon_8 = 0.251929\dots$	$2^5 \times 5 \times 11$	24	1.659266...
$\epsilon_8 \geq \epsilon > \epsilon_9 = 0.244650\dots$	$2^5 \times 5^2 \times 11$	36	1.650445...
$\epsilon_9 \geq \epsilon > \epsilon_{10} = 0.222392\dots$	$2^5 \times 5^2 \times 11 \times 17$	72	1.641937...
$\epsilon_{10} \geq \epsilon > \epsilon_{11} = 0.221064\dots$	$2^6 \times 5^2 \times 11 \times 17$	84	1.636269...

TAB. 1 – Les onze premiers nombres  $d_{3,2}$ -h.c.s.

**lemme 2.5** (Voir [2] pour  $k = 1$ ) Soit  $N_0$  le premier nombre  $d_{k,\ell}$ -h.c.s. tel que  $N_0 \geq \exp(e^2/\varphi(k))$ , et  $n$  entier,  $n \geq 2$ .

1. Si  $n \leq N_0$ , alors  $F(n; k, \ell) \leq F(N_0; k, \ell)$  et si  $n$  est tel que  $N_0 \leq N_1 \leq n \leq N_2$ , où  $N_1$  et  $N_2$  sont deux nombres  $d_{k,\ell}$ -h.c.s. consécutifs, alors  $F(n; k, \ell) \leq \max(F(N_1; k, \ell), F(N_2; k, \ell))$ .
2. Soit  $\lambda = \lambda(k, \ell) = \max_{n \geq 2} F(n; k, \ell) = F(N; k, \ell)$ . Alors  $N$  est un nombre  $d_{k,\ell}$ -h.c.s. associé à

$$\epsilon = \lambda \ln 2 \ln(\varphi(k) \ln N) / \ln^2(\varphi(k) \ln N).$$

### 3 Démonstration du théorème

Les assertions 1 et 2 s'obtiennent par application des lemmes 2.2 et 2.5. L'assertion 3 s'obtient des lemmes 2.4 et 2.5 et des majorations explicites des fonctions sommatoires des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, données dans [4] ainsi que du calcul effectif des nombres  $d_{k,\ell}$ -h.c.s. inférieurs ou égaux à  $N_{k,\ell}(25000)$ . Voici, dans la table ci-dessous, les valeurs des maximums absolus  $\lambda(k)$  de  $F(n; k, \ell)$  pour  $k = 1, 2, \dots, 13$  uniforme en  $\ell$ . ( $\Sigma$  désignant le nombre de nombres  $d_{k,\ell_0}$ -h.c.s  $\leq N_{k,\ell_0}(25000)$ ).

$k$	$\lambda(k)$	$\ell_0$	$N = N_{k,\ell_0,\epsilon}$	$\epsilon$	$d_{k,\ell_0}(N)$	$\Sigma$
1	1.537939...	1	$2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 13 \times 19$	0.235408...	2304	2896
2	1.348897...	1	$3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 29 \times 41 \times 43$	0.184288...	46080	2876
3	1.6619289...	2	$2^4 \times 5 \times 11$	0.289064...	20	1464
4	1.448428...	3	$3^3 \times 7 \times 11 \times 19 \times 23$	0.210647...	64	1453
5	2.071053...	2	$2^3 \times 7$	0.356207...	8	743
6	1.298412...	5	$5^3 \times 11^2 \times 17 \times 23 \times 29 \times 41 \times 47 \times 53 \times 59 \times 71$	0.162608...	3072	1444
7	2.427439...	2	$2^3$	0.415037...	4	487
8	1.646895...	3	$3^3 \times 13$	0.261859...	8	734
9	2.427439...	2	$2^3$	0.415033...	4	500
10	1.614755...	3	$3^3 \times 13$	0.261859...	8	727
11	2.228805...	3	$3^2$	0.369070...	3	290
12	1.383712...	5	$5^3 \times 17 \times 29 \times 41 \times 53$	0.174583...	64	726
13	3.214459...	2	$2^2$	0.584962...	3	264

TAB. 2 – Les maximums absolus  $\lambda(k)$  de  $F(n; k, \ell)$  pour  $k = 1, 2, \dots, 13$  uniforme en  $\ell$

### Remerciements

Le premier auteur exprime ses remerciements au laboratoire Laco de l'Université de Limoges, où ce travail a été réalisé, de son accueil chaleureux.

### Références

- [1] J.-L. Nicolas, On highly composite numbers, in : Ramanujan Revisited, Proceedings of the Centenary Conference, University of Illinois 1987, Eds. by G.E. Andrews and al., 215-244.
- [2] J.-L. Nicolas, G. Robin, Majorations explicites pour le nombre des diviseurs de  $n$ , Bull. Can. Math. Vol. 26 (4), (1983), 485-492.
- [3] S. Ramanujan, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. serie 2, 14, (1915), 347-409 and Collected papers, 78-128, Chelsea 2nd edition 1962.
- [4] O. Ramaré, R. Rumely, Primes in arithmetic progressions, Math. of computation, Vol. 65, N 213, (1996), 397-425.