# ESQUISSES
# ET
# SPECIFICATIONS

## MANUEL DE REFERENCE

## Quatrième Partie :
## Fibrations et Eclatements,
## Lemmes de Yoneda et Modèles Engendrés

**D. Duval**

Université Joseph Fourier

I.M.A.G. - L.M.C.

B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

dominique.duval@imag.fr

**et**

**C. Lair**

Université Denis Diderot-Paris 7, U.F.R. de Mathématiques

Equipe Catégories et Structures

2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

lairchrist@aol.com

Grenoble-Paris, le 2 Février 2001

# 1. Introduction.

Dans une série de travaux (voir [Guide-I], [Guide-II], ... ), nous proposons le formalisme des *mosaï ques*, des *produits en couronne* et des *produits en ruban* pour décrire, étudier, manipuler et construire des *spécifications* dont nous montrons que les *termes* représentent convenablement les *programmes* et leurs *processus d'évaluation* aussi bien (et c'est là tout l'intérêt de ce nouvau formalisme) dans le cadre de la programmation fonctionnelle que dans celui de la programmation impérative pour laquelle, jusqu'alors, les aspects *implicites* (effets de bord, traitement des erreurs, gestion des états ... ) s'intégraient mal aux formalisations antérieures.

Bien qu'une certaine familiarité avec les spécifications algébriques (voir par exemple [Goguen et al.78] et/ou [Wirsing90]) ou les catégories (voir par exemple [Mac Lane71]) ne puisse qu'aider à la compréhension de cette série de textes, aucun prérequis n'y est absolument indispensable. En effet, nous y procédons progressivement du particulier au général, en détaillant un certain nombre d’exemples de spécifications de plus en plus complexes, pour suggérer finalement la généralité optimum qui nous paraît judicieuse.

A l'inverse, il nous a semblé indispensable d'accompagner cette série de travaux (qui constituent, en quelque sorte, un "Guide de l'Utilisateur" des mosaï ques, du produit en couronne et du produit en ruban en spécification) d'une suite d'autres (constituant un "Manuel de Référence") présentant purement formellement, avec cette généralité optimum, "toutes" les définitions, "toutes" les méthodes et "tous" les résultats sur lesquels ce Guide de l'Utilisateur se trouverait ainsi rigoureusement fondé : le présent texte est le quatrième de cette suite d'autres qui composent ce Manuel de Référence (voir [Ref-I], [Ref-II], [Ref-III] ... ).

Dans cette Quatrième Partie sont présentés trois des points les plus fondamentaux (évidemment interdépendants) de la théorie des esquisses projectives.

Le premier de ces points (§2) concerne les *éclatements* (de modèles) et les représentations (discrètement) *fibrantes* (d'une esquisse projective vers une autre).

Une esquisse projective $\mathbf{E}$ petite (i.e. $\mathbb{U}$-petite, si $\mathbb{U}$ est un univers préfixé, au sens de [Ref-I]) étant donnée, on montre que les *éléments* (appartenant aux ensembles $\mu(E)$, valeurs de $\mu$ en les points $E$ de $\mathbf{E}$) d'un modèle ensembliste $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}$ s'organisent en une nouvelle esquisse projective $\mathbf{E} \backslash \mu$, appelée l'*éclatement de* $\mathbf{E}$ *par* $\mu$, de sorte qu'on dispose alors d'une représentation canonique $\mathbf{E} \backslash \mu \to \mathbf{E}$.

Inversement, on fournit une caractérisation intrinsèque des représentations (d'une autre esquisse projective vers $\mathbf{E}$) $\mathbf{F} \to \mathbf{E}$ isomorphes à une telle représentation canonique : on les appelle les représentations *(discrètement) fibrantes* (petites) sur $\mathbf{E}$.

Alors, il y a équivalence entre la catégorie des modèles ensemblistes de $\mathbf{E}$ et la catégorie des représentations (discrètement) fibrantes (petites) sur $\mathbf{E}$.

En particulier, $\mathbf{E}$ peut n'être qu'un graphe à composition (i.e. une esquisse projective ... sans cônes projectifs distingués) : le résultat obtenu est, alors, "purement fonctoriel". A fortiori, et plus particulièrement encore, $\mathbf{E}$ peut n'être qu'une simple catégorie (i.e. une esquisse projective sans cônes projectifs dictingués et dont le support est ... une catégorie) : on récupère, de la sorte, un résultat "purement fonctoriel" et "purement catégorique" très classique.

Le deuxième des points que nous présentons (§3) concerne les *contre-modèles* (et les lemmes) *de Yoneda*, d'abord pour les prototypes projectifs, puis pour les esquisses projectives (§3)

Un prototype projectif localement petit $\mathbf{P}$ étant une esquisse projective dont le support $\underline{\mathbf{P}}$ est une *catégorie* et dont les cônes projectifs distingués sont des cônes projectifs *limites*, les classiques *foncteurs représentés* (par les points $P$ de la catégorie $\underline{\mathbf{P}}$) $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P,-) : \underline{\mathbf{P}} \to \boldsymbol{Ens}$ sont évidemment sous-jacents à autant de *modèles ensemblistes* de $\mathbf{P}$. On en déduit immédiatement que le classique foncteur contravariant *plongement de Yoneda* $\underline{\mathbf{P}} \text{-}|\!\to \boldsymbol{Fonc}(\underline{\mathbf{P}},\boldsymbol{Ens})$ se restreint en un foncteur contravariant $\underline{\mathbf{P}} \text{-}|\!\to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens})$, puis que ce foncteur contravariant est sous-jacent à un *contre-modèle* $\mathbf{P} \text{-}|\!\to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens})$, dit *de Yoneda* et *intrinsèque* au prototype projectif $\mathbf{P}$. Alors, il est facile d'établir que ce contre-modèle est plein, fidèle et dense.

Plus généralement, si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective *petite*, on sait (voir [Ref-II]) qu'elle engendre un prototype projectif petit (donc localement petit) $\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})$ et qu'on dispose d'une représentation canonique $\mathbf{E} \to \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})$, de sorte que le foncteur $\boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}),\boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens})$ qu'elle induit est un isomorphisme. Par composition, on obtient donc un nouveau *contre-modèle* :

$$\mathbf{E} \to \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}) \text{-}|\!\to \boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}),\boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}),$$

encore dit *de Yoneda*, mais seulement *relatif* à l'esquisse projective $\mathbf{E}$ (i.e. relatif au *mode de construction* de $\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})$ à partir de $\mathbf{E}$, puisqu'en général, même si $\mathbf{E} = \mathbf{P}$ est un prototype projectif, $\mathbf{P}$ et $\mathrm{ProtopG}(\mathbf{P})$ *ne sont qu'isomorphes*, de sorte que les contre-modèles de Yoneda intrinsèque et relatif à $\mathbf{P}$ *ne sont que naturellement équivalents*). Alors il apparaît que, même si ce contre-modèle n'est, en général, ni plein ni fidèle, il demeure dense.

Enfin, le troisième point que nous détaillons (§4) a trait au *théorème du modèle engendré* (dont on peut trouver des démonstrations bien antérieures fort différentes, i.e. plus "sémantiques", en [Ehresmann67a], [Ehresmann67b], [Foltz69], [Burroni70], [Lair87] notamment), théorème qui généralise (comme souligné initialement par C. Ehresmann) le classique "théorème du faisceau associé" de la théorie des faisceaux (et fréquemment référencé sous cette appellation - bien que réductrice - à la suite de ses travaux).

Si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective petite et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}$ en est un modèle, on peut étendre $\mathbf{E}$ en une nouvelle esquisse projective petite $\mathbf{E} > \mu$ en ajoutant à $\mathbf{E}$ un nouveau point $E_\mu$, puis autant de flèches de projections de ce point vers les points $E$ de $\mathbf{E}$ qu'il y a d'éléments dans $\mu(E)$, enfin en distinguant le cône projectif (indexé par $\mathbf{E} \backslash \mu$) ainsi obtenu. Alors, il est facile d'établir que le foncteur $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} > \mu, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens})$, induit par la représentation injection canonique $\mathbf{E} \to \mathbf{E} > \mu$, est une équivalence et que le contre modèle (obtenu par composition avec le contre-modèle de Yoneda relatif à $\mathbf{E} > \mu$) :

$$\mathbf{E} > \mu \mathrel{-\!\!|\!\!\to} \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} > \mu, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens})$$

envoie $E_\mu$ sur un modèle isomorphe à $\mu$.

Maintenant, si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une représentation de $\mathbf{E}$ vers une autre esquisse projective petite, on peut construire l'esquisse projective petite $\mathbf{E}' >_\rho \mu$, somme fibrée de $\mathbf{E} > \mu$ avec $\mathbf{E}'$ au-dessus de $\mathbf{E}$. Alors, le foncteur $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho \mu, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens})$, induit par la co-projection $\mathbf{E}' \to \mathbf{E}' >_\rho \mu$, est une équivalence et on prouve que le contre modèle (obtenu par composition avec le contre-modèle de Yoneda relatif à $\mathbf{E}' >_\rho \mu$) :

$$\mathbf{E}' > \mu \mathrel{-\!\!|\!\!\to} \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho \mu, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens})$$

envoie le point $E'_{\rho,\mu}$, image de $E_\mu$ par la co-projection $\mathbf{E} > \mu \to \mathbf{E}' >_\rho \mu$, sur un modèle qui est librement engendré par $\mu$ le long du foncteur $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens})$, induit par la représentation $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$. Ainsi, ce foncteur a un adjoint à gauche.

C'est évidemment la nature même d'un Manuel de Référence que de ne pas toujours être d'une lecture lénifiante. Nous n'avons guère pu échapper à cette règle, mais le lecteur trouvera dans la série de textes constituant le Guide de l'Utilisateur, évoqué plus haut, de nombreuses motivations et de nombreux exemples.

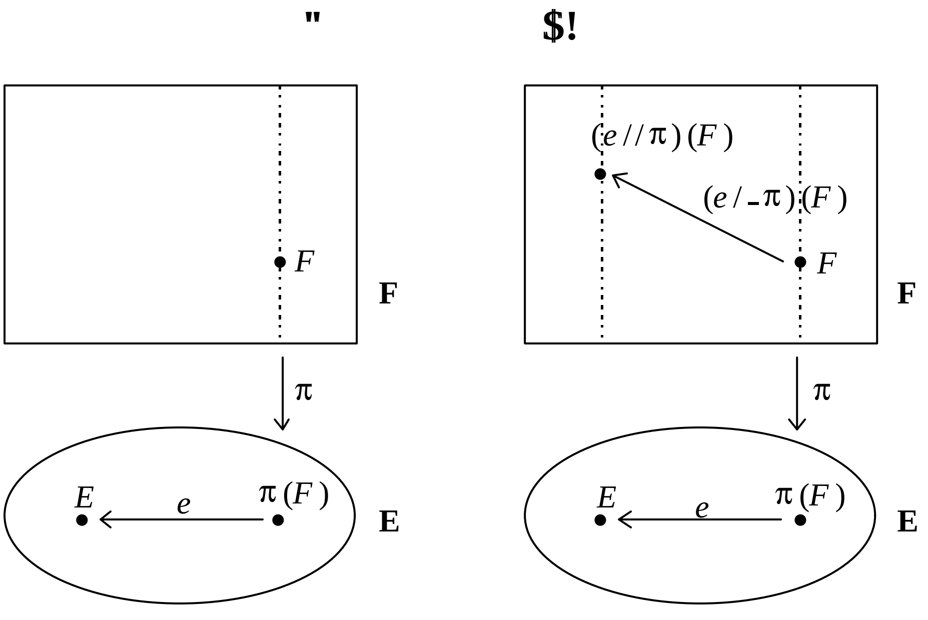
C'est également la nature même d'un Manuel de Référence que d'être aussi auto-contenu que possible, en permettant ainsi la reconstitution de "tout" ce qui est techniquement nécessaire sans devoir recourir à de trop diverses sources d'informations, souvent implicites ou ambigües. C'est ce à quoi nous nous sommes astreints : on peut donc lire ce travail sans autre pré-requis qu'un minimum de familiarisation avec les usages les plus courants en théorie des catégories.

# 2. Fibrations, modèles et éclatements.

## 2.1. Fibrations.

**2.1.a.** Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont deux esquisses projectives, on dit qu'une représentation $\pi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ est une *fibration (discrète)* ou encore qu'elle est *(discrètement)* **E**-*fibrante*, si :

- pour tout point $F$ de $\mathbf{F}$ et pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$, la condition suivante est vérifiée :
  - pour toute flèche $e : \pi(F) \to E$ de $\mathbf{E}$, il existe un et un seul point $(e//\pi)(F)$ de $\mathbf{F}$ et une et une seule flèche $(e/\text{-}\pi)(F) : F \to (e//\pi)(F)$ de $\mathbf{F}$ tels que $\pi\big((e/\text{-}\pi)(F)\big) = e$, comme représenté ci-dessous :




autrement dit :

- le diagramme (d'applications) qui suit est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}(\mathbf{F}) \arrow[r, "\mathrm{seldom}(\mathbf{F})"] \arrow[d, "\mathrm{Fl}(\pi)"'] & \mathrm{Pt}(\mathbf{F}) \arrow[d, "\mathrm{Pt}(\pi)"] \\ \mathrm{Fl}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\mathrm{seldom}(\mathbf{E})"'] & \mathrm{Pt}(\mathbf{E}) \end{tikzcd}$$

- pour toute flèche $f$ de $\mathbf{F}$, la condition suivante est vérifiée :

  - si $\pi(f)$ est une flèche identité de $\mathbf{E}$, alors $f$ est une flèche identité de $\mathbf{F}$,

autrement dit :

  - le diagramme (d'applications) qui suit est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{FlId}(\mathbf{F}) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\mathrm{FlId}(\pi)"'] & \mathrm{Fl}(\mathbf{F}) \arrow[d, "\mathrm{Fl}(\pi)"] \\ \mathrm{FlId}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\subseteq"'] & \mathrm{Fl}(\mathbf{E}) \end{tikzcd}$$

- pour tout couple $(f_1, f_2)$ de flèches consécutives de $\mathbf{F}$, la condition suivante est vérifiée :

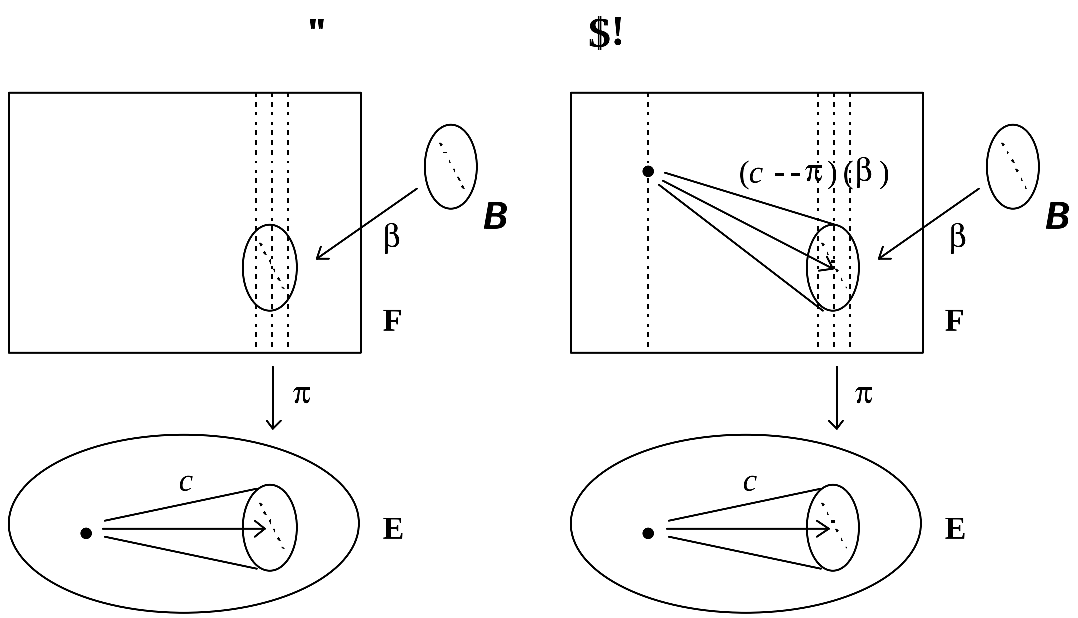
  - si $(\pi(f_1), \pi(f_2))$ est un couple composable de $\mathbf{E}$, alors $(f_1, f_2)$ est un couple composable de $\mathbf{F}$,

autrement dit :

  - le diagramme (d'applications) qui suit est un produit fibré :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CComp}(\mathbf{F}) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\mathrm{CComp}(\pi)"'] & \mathrm{CCons}(\mathbf{F}) \arrow[d, "\mathrm{CCons}(\pi)"] \\
\mathrm{CComp}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\subseteq"'] & \mathrm{CCons}(\mathbf{E})
\end{tikzcd}
$$

- pour tout graphe à composition $\boldsymbol{B}$, la condition suivante est vérifiée :
  - pour tout foncteur $\beta : \boldsymbol{B} \to \underline{\mathbf{F}}$ et pour tout cône $\boldsymbol{B}$-projectif $c$, de base $\underline{\pi} \circ \beta : \boldsymbol{B} \to \underline{\mathbf{E}}$, distingué dans $\mathbf{E}$, il existe un unique cône projectif $(c -- \pi)(\beta)$, de base $\beta$, distingué dans $\mathbf{F}$, tel que $\pi\big((c -- \pi)(\beta)\big) = c$, comme représenté dans la figure ci-dessous :




autrement dit :

- le diagramme (d'applications) qui suit est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathrm{CPDist}(\boldsymbol{B},\mathbf{F}) \arrow[r, "\mathrm{basedist}(\boldsymbol{B},\mathbf{F})"] \arrow[d, "\mathrm{CPDist}(\boldsymbol{B},\pi)"'] & \mathrm{Fonc}(\boldsymbol{B},\underline{\mathbf{F}}) \arrow[d, "\mathrm{Fonc}(\boldsymbol{B},\underline{\pi})"] \\
\mathrm{CPDist}(\boldsymbol{B},\mathbf{E}) \arrow[r, "\mathrm{basedist}(\boldsymbol{B},\mathbf{E})"'] & \mathrm{Fonc}(\boldsymbol{B},\underline{\mathbf{E}})
\end{tikzcd}$$

**2.1.b.** Si $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont trois esquisses projectives et si $\pi_1 : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{E}$ et $\pi_2 : \mathbf{F}_2 \to \mathbf{E}$ sont deux représentations, on dit qu'une représentation $\tau : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$ *définit un* **E**-*triangle (commutatif de représentations)* $(\pi_1,\tau,\pi_2) : \pi_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi_2$ *de* $\pi_1$ *vers* $\pi_2$ et de *base* $\tau$ (et on note plus simplement $\tau^\nabla = (\pi_1,\tau,\pi_2) : \pi_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi_2$, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté) si :

- $\pi_2 \circ \tau = \pi_1$,

autrement dit, si :

- le diagramme (de représentations) ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_1 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \mathbf{F}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& \mathbf{E} &
\end{tikzcd}$$

En particulier, si $\pi_1 : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{E}$ et $\pi_2 : \mathbf{F}_2 \to \mathbf{E}$ sont deux représentations **E**-fibrantes, on dit que $\tau^\nabla : \pi_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi_2$ est un **E**-triangle **E**-*fibrant*.

**2.1.c.** Si $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{F}'$ sont trois esquisses projectives et si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ et $\pi' : \mathbf{F}' \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations (quelconques), on note $\rho * \pi'$ (ou même, parfois, $\rho * \pi' = \mathbf{E} \times_{\mathbf{E}'} \mathbf{F}'$, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté) l'*esquisse projective produit fibré canonique de* $\rho$ *avec* $\pi'$, i.e. l'esquisse projective évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les $[E, F']$, où $E$ est un point de $\mathbf{E}$, où $F'$ est un point de $\mathbf{F}'$ et où $\rho(E) = \pi'(F')$,
- ses flèches sont les $[e, f'] : [E_1, F'_1] \to [E_2, F'_2]$, où $e : E_1 \to E_2$ est une flèche de $\mathbf{E}$, où $f' : F'_1 \to F'_2$ est une flèche de $\mathbf{F}'$ et où $\rho(e) = \pi'(f')$,
- ses flèches identités sont les $[e, f'] : [E, F'] =\!\!\to [E, F']$, où $E$ est un point de $\mathbf{E}$, où $F'$ est un point de $\mathbf{F}'$, où $e : E =\!\!\to E$ est une flèche identité de $\mathbf{E}$, où $f' : F' =\!\!\to F'$ est une flèche identité de $\mathbf{F}'$ et où $\rho(e) = \pi'(f')$,
- ses couples composables sont les :

$$([e_1, f'_1], [e_2, f'_2]),$$

  où $(e_1, e_2)$ est un couple composable de $\mathbf{E}$, où $(f'_1, f'_2)$ est un couple composable de $\mathbf{F}'$ et où $(\rho(e_1), \rho(e_2)) = (\pi'(f'_1), \pi'(f'_2))$, et alors on a :

$$[e_2, f'_2] \bullet [e_1, f'_1] = [e_2 \bullet e_1, f'_2 \bullet f'_1],$$

- ses cônes distingués sont les :

$$[c, d'] = (\, [c^{\times}(B), d'^{\times}(B)] : [c^{\times}, d'^{\times}] \to [c(B), d'(B)]\,)_{B \,\in\, \boldsymbol{B}}$$

  où $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition, où $c = (\, c^{\times}(B) : c^{\times} \to c(B)\,)_{B \,\in\, \boldsymbol{B}}$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif distingué de $\mathbf{E}$, où $d' = (\, d'^{\times}(B) : d'^{\times} \to d'(B)\,)_{B \,\in\, \boldsymbol{B}}$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif distingué de $\mathbf{F}'$ et où $\rho(c) = \pi'(d')$.

Alors :

- on note :

$$\rho \downarrow\!* \pi' : \rho * \pi' \to \mathbf{E}$$

  la *représentation première projection*, i.e. la représentation évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

  - pour tout point $[E, F']$ de $\rho * \pi'$, on a $(\rho \downarrow\!* \pi')([E, F']) = E$,
  - pour toute flèche $[e, f']$ de $\rho * \pi'$, on a $(\rho \downarrow\!* \pi')([e, f']) = e$,

- on note :

$$\rho *\!\downarrow \pi' : \rho * \pi' \to \mathbf{F}'$$

  la *représentation seconde projection*, i.e. la représentation évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

  - pour tout point $[E, F']$ de $\rho * \pi'$, on a $(\rho *\!\downarrow \pi')([E, F']) = F'$,
  - pour toute flèche $[e, f']$ de $\rho * \pi'$, on a $(\rho *\!\downarrow \pi')([e, f']) = f'$,

de sorte que le diagramme (de représentations) ci-dessous est évidemment commutatif (où on désigne par $\rho \downarrow\!*\!\downarrow \pi'$ sa diagonale) :

$$
\begin{tikzcd}
\rho^*\pi' \arrow[r, "\rho^*{\downarrow}\pi'"] \arrow[d, "\rho{\downarrow}^*\pi'"'] \arrow[dr, "\rho{\downarrow}^*{\downarrow}\pi'"] & \mathbf{F}' \arrow[d, "\pi'"] \\
\mathbf{E} \arrow[r, "\rho"'] & \mathbf{E}'
\end{tikzcd}
$$

En particulier, il est facile de vérifier que, si $\pi' : \mathbf{F}' \to \mathbf{E}'$ est une représentation $\mathbf{E}'$-fibrante, alors $\rho{\downarrow}^*\pi' : \rho^*\pi' \to \mathbf{E}$ est une représentation $\mathbf{E}$-fibrante.

**2.1.d.** Si $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{F}'_1$ et $\mathbf{F}'_2$ sont quatre esquisses projectives, si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, $\pi'_1 : \mathbf{F}'_1 \to \mathbf{E}'$, $\pi'_2 : \mathbf{F}'_2 \to \mathbf{E}'$ sont trois représentations et si $\tau' : \mathbf{F}'_1 \to \mathbf{F}'_2$ est une représentation définissant un $\mathbf{E}'$-triangle $\tau'^{\nabla} : \pi'_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi'_2$, on note :

$$\rho^*(\tau'^{\nabla}) : \rho^*\pi'_1 \to \rho^*\pi'_2$$

l'unique représentation rendant commutatif le diagramme (de représentations ci-dessous) :

$$
\begin{tikzcd}
 & \rho^*\pi'_2 \arrow[rr, "\rho^*{\downarrow}\pi'_2"] \arrow[dd, "\rho{\downarrow}^*\pi'_2"] & & \mathbf{F}'_2 \arrow[dd, "\pi'_2"] \\
\rho^*\pi'_1 \arrow[ur, "\rho^*(\tau'^{\nabla})"] \arrow[rr, "\rho^*{\downarrow}\pi'_1"'] \arrow[dr, "\rho{\downarrow}^*\pi'_1"'] & & \mathbf{F}'_1 \arrow[ur, "\tau'"] \arrow[dr, "\pi'_1"] & \\
 & \mathbf{E} \arrow[rr, "\rho"'] & & \mathbf{E}'
\end{tikzcd}
$$

i.e. la représentation évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point $[E,F'_1]$ de $\rho^*\pi'_1$, on a $(\rho^*(\tau'^{\nabla}))([E,F'_1]) = [E,\tau'(F'_1)]$,

- pour toute flèche $[e, f'_1]$ de $\rho * \pi'_1$, on a $(\rho * (\tau'^{\nabla}))([e, f'_1]) = [e, \tau'(f'_1)]$.

Alors, $\rho * (\tau'^{\nabla}) : \rho * \pi'_1 \to \rho * \pi'_2$ définit évidemment (par construction) un **E**-triangle :

$$\rho \downarrow* (\tau'^{\nabla}) = (\rho * (\tau'^{\nabla}))^{\nabla} : \rho \downarrow* \pi'_1 \text{-}\nabla\text{->} \rho \downarrow* \pi'_2 .$$

En particulier, si $\tau'^{\nabla} : \pi'_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi'_2$ est un $\mathbf{E}'$-triangle $\mathbf{E}'$-fibrant (i.e. si $\pi'_1 : \mathbf{F}'_1 \to \mathbf{E}'$ et $\pi'_2 : \mathbf{F}'_2 \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations $\mathbf{E}'$-fibrantes), alors $\rho \downarrow* (\tau'^{\nabla}) : \rho \downarrow* \pi'_1 \text{-}\nabla\!\!\to \rho \downarrow* \pi'_2$ est évidemment un **E**-triangle **E**-fibrant.

**2.1.e.** Si $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{F}'$ sont trois esquisses projectives, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations, si $\pi' : \mathbf{F}' \to \mathbf{E}'$ est une représentation $\mathbf{E}'$-fibrante et si $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle, alors :

- on note :

$$m * \pi' : \rho_1 * \pi' \to \rho_2 * \pi'$$

  la représentation évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

  - pour tout point $[E, F']$ de $\rho_1 * \pi'$, on a :

$$(m * \pi')([E, F']) = [E, (m(E) // \pi)(F')],$$

  - pour toute flèche $[e, f']$ de $\rho_1 * \pi'$, on a :

$$(m * \pi')([e, f']) = [e, (\rho_2(e) /\text{-} \pi')\big((m(\mathrm{dom}(e)) // \pi')(\mathrm{dom}(f'))\big)],$$

- on note :

$$m *\!\downarrow \pi' : \rho_1 *\!\downarrow \pi' \Rightarrow (\rho_2 *\!\downarrow \pi') \circ (m * \pi') : \rho_1 * \pi' \to \mathbf{F}'$$

  la métamorphose naturelle ("par unicité") évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

  - pour tout point $[E, F']$ de $\rho_1 * \pi'$, on a :

$$m *\!\downarrow \pi'([E, F']) = (m(E) /\text{-} \pi)(F').$$

Ainsi, $(m * \pi', m *\!\downarrow \pi')$ est l'unique couple, constitué d'une représentation et d'une métamorphose naturelle, rendant "2-commutatif" le diagramme (de représentations et métamorphoses naturelles) ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
 & \rho_1 * \pi' \arrow[dl, "m * \pi'"'] \arrow[drr, "\rho_1 *\downarrow \pi'"] \arrow[d, "\rho_1 \downarrow * \pi'"] \arrow[dr, phantom, "m *\downarrow \pi' \ \Swarrow"] & & \\
\rho_2 * \pi' \arrow[rrr, "\rho_2 *\downarrow \pi'"'] \arrow[dr, "\rho_2 \downarrow * \pi'"'] & & & \mathbf{F}' \arrow[d, "\pi'"] \\
 & \mathbf{E} \arrow[rr, shift left=2, "\rho_1"] \arrow[rr, shift right=2, "\rho_2"'] \arrow[rr, phantom, "\Swarrow m"] & & \mathbf{E}'
\end{tikzcd}
$$

i.e. où on a :

$$(\rho_2 \downarrow * \pi') \circ (m * \pi') = (\rho_1 \downarrow * \pi')$$

et :

$$m \circ (\rho_1 \downarrow * \pi') = \pi' \circ (m *\downarrow \pi') .$$

En particulier, la représentation $m * \pi' : \rho_1 * \pi' \to \rho_2 * \pi'$ définit donc un $\mathbf{E}$-triangle $\mathbf{E}$-fibrant :

$$m \downarrow * \pi' = (m * \pi')^{\nabla} : \rho_1 \downarrow * \pi' \text{-}\nabla\!\!\to \rho_2 \downarrow * \pi' .$$

**2.1.f.** Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, on dit qu'une représentation $\mathbf{E}$-fibrante $\pi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ est également $\mathbb{U}$-*petite* si :

- $\mathbf{F}$ est $\mathbb{U}$-petite.

Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, on note $\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})$ la catégorie évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les représentations $\mathbf{E}$-fibrantes et $\mathbb{U}$-petites,
- ses flèches sont les $\mathbf{E}$-triangles $\mathbf{E}$-fibrants (que l'on compose comme leurs bases).

Si $(\mathbb{U}, \mathbb{U}')$ est un *couple d'univers emboités*, i.e. si $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}'$ sont deux univers tels que $\mathbb{U} \subset \mathbb{U}'$ et $\mathbb{U} \in \mathbb{U}'$, et si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, il est clair que $\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})$ est une catégorie $\mathbb{U}'$-petite (et localement $\mathbb{U}$-petite).

**2.1.g.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives $\mathbb{U}$-petites et si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une représentation, on note :

$$\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho) : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}') \to \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})$$

le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute représentation $\mathbf{E}'$-fibrante et $\mathbb{U}$-petite $\pi' : \mathbf{F}' \to \mathbf{E}'$, on a :

$$\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho)(\pi') = \rho \downarrow^* \pi' : \rho^* \pi' \to \mathbf{E},$$

- pour toutes représentations $\mathbf{E}'$-fibrantes et $\mathbb{U}$-petites $\pi'_1 : \mathbf{F}'_1 \to \mathbf{E}'$ et $\pi'_2 : \mathbf{F}'_2 \to \mathbf{E}'$ et pour toute représentation $\tau' : \mathbf{F}'_1 \to \mathbf{F}'_2$ définissant un $\mathbf{E}'$-triangle $\mathbf{E}'$-fibrant $\tau'^{\nabla} : \pi'_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi'_2$, on a :

$$\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho)(\tau'^{\nabla}) : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho)(\pi'_1) \text{-}\nabla\!\!\to \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho)(\pi'_2)$$

$$=$$

$$\rho \downarrow^* (\tau'^{\nabla}) : \rho \downarrow^* \pi'_1 \text{-}\nabla\!\!\to \rho \downarrow^* \pi'_2 .$$

**2.1.h.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives $\mathbb{U}$-petites, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations et si $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle, on note :

$$\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(m) : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho_1) \Rightarrow \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho_2) : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}') \to \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})$$

la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour toute représentation $\mathbf{E}'$-fibrante et $\mathbb{U}$-petite $\pi' : \mathbf{F}' \to \mathbf{E}'$, on a :

$$\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(m)(\pi') : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho_1)(\pi') \to \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho_2)(\pi')$$

$$=$$

$$m \downarrow^* \pi' = (m * \pi')^{\nabla} : \rho_1 \downarrow^* \pi' \text{-}\nabla\text{->} \rho_2 \downarrow^* \pi' .$$

## 2.2. Fibrations et modèles.

**2.2.a.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective et $\mathbb{U}$-petite et si $\pi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ est une représentation $\mathbf{E}$-fibrante et $\mathbb{U}$-petite, on désigne par $\mathbf{E} /\!/ \pi : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ le *modèle canoniquement associé à* $\pi$, i.e. le modèle ensembliste et $\mathbb{U}$-petit évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$, on a :

$$(\mathbf{E} /\!/ \pi)(E) = E /\!/ \pi = \{ F \in \mathrm{Pt}(\mathbf{F}) \,/\, \pi(F) = E \} = \pi^{-1}(E)\,,$$

- pour toute flèche $e : E_1 \to E_2$ de $\mathbf{E}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{E} /\!/ \pi)(e) : (\mathbf{E} /\!/ \pi)(E_1) & \to & (\mathbf{E} /\!/ \pi)(E_2) \\ & = & \\ e /\!/ \pi : E_1 /\!/ \pi & \to & E_2 /\!/ \pi \\ F_1 & \mapsto & (e /\!/ \pi)(F_1)\,. \end{array}$$

**2.2.b.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, si $\pi_1 : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{E}$ et $\pi_2 : \mathbf{F}_2 \to \mathbf{E}$ sont deux représentations $\mathbf{E}$-fibrantes et $\mathbb{U}$-petites et si $\tau : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$ est une représentation définissant un $\mathbf{E}$-triangle $\mathbf{E}$-fibrant $\tau^{\nabla} : \pi_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi_2$, on désigne par :

$$\mathbf{E} /\!/ (\tau^{\nabla}) : \mathbf{E} /\!/ \pi_1 \Rightarrow \mathbf{E} /\!/ \pi_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

l'*homomorphisme canoniquement associé à* $\tau^{\nabla}$, i.e. l'homomorphisme évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{E} /\!/ (\tau^{\nabla}))(E) : (\mathbf{E} /\!/ \pi_1)(E) & \to & (\mathbf{E} /\!/ \pi_2)(E) \\ & = & \\ E /\!/ (\tau^{\nabla}) : E /\!/ \pi_1 & \to & E /\!/ \pi_2 \\ F_1 & \mapsto & \tau(F_1)\,. \end{array}$$

**2.2.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective et $\mathbb{U}$-petite, on note :

$$(\mathbf{E} /\!/ \text{-})_{\mathbb{U}} : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute représentation **E**-fibrante et $\mathbb{U}$-petite $\pi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$, on a :

$$(\mathbf{E} /\!/ \text{-})_{\mathbb{U}}(\pi) = \mathbf{E} /\!/ \pi : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}},$$

- pour toutes représentations **E**-fibrantes et $\mathbb{U}$-petites $\pi_1 : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{E}$ et $\pi_2 : \mathbf{F}_2 \to$ et pour toute représentation $\tau : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$ définissant un **E**-triangle **E**-fibrant $\tau^{\nabla} : \pi_1 \text{-}\nabla\!\!\to \pi_2$, on a :

$$(\mathbf{E} /\!/ \text{-})_{\mathbb{U}}(\tau^{\nabla}) = \mathbf{E} /\!/ (\tau^{\nabla}) : \mathbf{E} /\!/ \pi_1 \Rightarrow \mathbf{E} /\!/ \pi_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}.$$

## 2.3. Modèles et éclatements.

**2.3.a.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si **E** est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, on désigne par $\mathbf{E} \backslash \mu$ l'*esquisse projective éclatement de* **E** *par* $\mu$, i.e. l'esquisse projective $\mathbb{U}$-petite évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- ses points sont les $[E, \mathrm{x}]$, où $E$ est un point de **E** et x est un élément de $\mu(\mathrm{x})$,
- ses flèches sont les $[e, \mathrm{x}_1] : [E_1, \mathrm{x}_1] \to [E_2, \mathrm{x}_2]$, où $e : E_1 \to E_2$ est une flèche de **E** et $\mu(e)(\mathrm{x}_1) = \mathrm{x}_2$,
- ses flèches identités sont les $[e, \mathrm{x}] : [E, \mathrm{x}] =\!\!\to [E, \mathrm{x}]$, où $e : E =\!\!\to E$ est une flèche identité de **E**,
- ses couples composables sont les :

$$([e_1, \mathrm{x}_1], [e_2, \mathrm{x}_2]),$$

  où $(e_1, e_2)$ est un couple composable de **E**, et on a :

$$[e_2, \mathrm{x}_2] \bullet [e_1, \mathrm{x}_1] = [e_2 \bullet e_1, \mathrm{x}_1],$$

- ses cônes projectifs distingués sont les :

$$[c, \mathrm{x}] = (\ [c^{\times}(B), \mathrm{x}] : [c^{\times}, \mathrm{x}] \to [\,c(B), \mu(c^{\times}(B))(\mathrm{x})\,]\ )_{B\,\in\,\boldsymbol{B}}$$

  où $c = (c^{\times}(B) : c^{\times} \to c(B))_{B\,\in\,\boldsymbol{B}}$ est un cône projectif distingué de **E** et x est un élément de (l'image par $\mu$ du sommet $c^{\times}$ de $c$) $\mu(c^{\times})$.

Dans ces conditions, on note $\mathbf{E} \backslash\!\backslash \mu : \mathbf{E} \backslash \mu \to \mathbf{E}$ la *représentation projection canonique,* i.e. la représentation évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $(\mathbf{E} \backslash\!\backslash \mu)([E, \mathrm{x}]) = E$, pour tout point $[E, \mathrm{x}]$ de $\mathbf{E} \backslash \mu$,

- $(\mathbf{E} \backslash\backslash \mu)([e,\mathrm{x}_1]) = e$ , pour toute flèche $[e,\mathrm{x}_1]$ de $\mathbf{E} \backslash \mu$ .

Alors, il est facile de vérifier que $\mathbf{E} \backslash\backslash \mu : \mathbf{E} \backslash \mu \to \mathbf{E}$ est une représentation **E**-fibrante.

**2.3.b.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, si $\mu_1 , \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ sont deux modèles et si $h : \mu_1 \Rightarrow \mu_2$ est un homomorphisme, on désigne par $\mathbf{E} \backslash h : \mathbf{E} \backslash \mu_1 \to \mathbf{E} \backslash \mu_2$ la *représentation éclatement de* $\mathbf{E}$ *par* $h$, i.e. la représentation évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $(\mathbf{E} \backslash h)([E,\mathrm{x}]) = [E, h(E)(\mathrm{x})]$ , pour tout point $[E,\mathrm{x}]$ de $\mathbf{E} \backslash \mu_1$ ,
- $(\mathbf{E} \backslash h)([e,\mathrm{x}_1]) = [e, h(E_1)(\mathrm{x}_1)]$ , pour toute flèche $[e : E_1 \to E_2 ,\mathrm{x}_1]$ de $\mathbf{E} \backslash \mu_1$ .

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que la représentation $\mathbf{E} \backslash h : \mathbf{E} \backslash \mu_1 \to \mathbf{E} \backslash \mu_2$ définit un **E**-triangle, évidemment **E**-fibrant, $\mathbf{E} \backslash\backslash h = (\mathbf{E} \backslash h)^{\nabla} : \mathbf{E} \backslash\backslash \mu_1 \text{-}\nabla\!\!\to \mathbf{E} \backslash\backslash \mu_2$ .

**2.3.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, on note :

$$(\mathbf{E} \backslash\backslash -)_{\mathbb{U}} : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})$$

le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ , on a :

$$(\mathbf{E} \backslash\backslash -)_{\mathbb{U}}(\mu) = \mathbf{E} \backslash\backslash \mu : \mathbf{E} \backslash \mu \to \mathbf{E} ,$$

- pour tous modèles $\mu_1 , \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ et tout homomorphisme $h : \mu_1 \Rightarrow \mu_2$ , on a :

$$(\mathbf{E} \backslash\backslash -)_{\mathbb{U}}(h) = \mathbf{E} \backslash\backslash h : \mathbf{E} \backslash\backslash \mu_1 \text{-}\nabla\text{->} \mathbf{E} \backslash\backslash \mu_2 .$$

## 2.4. Fibrations vs. éclatements.

**2.4.a.** Il est facile de vérifier que :

PROPOSITION 1. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers et si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse projective et* $\mathbb{U}$*-petite, alors les deux foncteurs :*

$$(\mathbf{E}\backslash\backslash\text{-})_{\mathbb{U}} : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}) : (\mathbf{E}/\!/\text{-})_{\mathbb{U}}$$

*définissent une équivalence entre la catégorie des modèles ensemblistes* $\mathbb{U}$ *-petits de* $\mathbf{E}$ *et la catégorie des représentations* $\mathbf{E}$*-fibrantes et* $\mathbb{U}$ *-petites.*

**2.4.b.** Si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie et si $\mathbb{V}$ est un $\boldsymbol{J}$-système tensoriel, on note $\mathbb{V}^{\text{oppo}}$ le $\boldsymbol{J}^{\text{op}}$-système tensoriel *absolument dual* (ou *absolument opposé*) de $\mathbb{V}$, i.e. le système tensoriel évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute flèche $j$ de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$(\mathbb{V}^{\text{oppo}})_j = \mathbb{V}_j\,,$$

- pour tout couple $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de flèches consécutives (donc composables) de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$\text{ptens}(\mathbb{V}^{\text{oppo}}, (j', j)) : (\mathbb{V}^{\text{oppo}})_{j'} \times (\mathbb{V}^{\text{oppo}})_j \to (\mathbb{V}^{\text{oppo}})_{j \cdot^{\text{op}} j'}$$

$$=$$

$$\text{ptens}(\mathbb{V}^{\text{oppo}}, (j', j)) : \mathbb{V}_{j'} \times \mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_{j \cdot^{\text{op}} j'}$$

$$=$$

$$\mathbb{V}_{j'} \times \mathbb{V}_j \cong \mathbb{V}_j \times \mathbb{V}_{j'} \xrightarrow[\text{ptens}(\mathbb{V},(j,j'))]{} \mathbb{V}_{j' \cdot j} = \mathbb{V}_{j \cdot^{\text{op}} j'}\,,$$

(pour simplifier, mais pour éviter toute ambiguïté dans la considération simultanée de $\mathbb{V}$ et $\mathbb{V}^{\text{oppo}}$, on pourra noter :

$$\text{ptens}(\mathbb{V}^{\text{oppo}}, (j', j)) = \text{-} \otimes^{\text{oppo}}{}_{j', j} \text{-} = \text{-} \otimes^{\text{oppo}}{}_{\ldots} \text{-}\ ,$$

(au même titre qu'on a pu noter :

$$\text{ptens}(\mathbb{V}, (j, j')) = \text{-} \otimes_{j, j'} \text{-} = \text{-} \otimes_{\ldots} \text{-}\ )).$$

Dans ces conditions, il est clair que si $\mathbb{V}$ est quasi-associatif de gauche à droite (resp. associatif, quasi-unitaire, unitaire, quasi-catégorique, catégorique) alors $\mathbb{V}^{\text{oppo}}$ est quasi-associatif de gauche à droite (resp. associatif, quasi-unitaire, unitaire, quasi-catégorique, catégorique).

Si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie, si $\theta : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}^{\text{op}}$ est un foncteur inversible et si $\mathbb{V}$ est un $\boldsymbol{J}$-système tensoriel, on note $\mathbb{V}^{\theta\text{-opp}}$ le $\boldsymbol{J}$-système tensoriel $\theta$-*dual* (ou $\theta$-*opposé*) de $\mathbb{V}$, i.e. le $\boldsymbol{J}$-système tensoriel $\mathbb{V}^{\theta\text{-opp}} = (\mathbb{V}^{\text{oppo}})_\theta$ obtenu, à partir de $\mathbb{V}^{\text{oppo}}$, par changement d'indexation le long de $\theta : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}$. S'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on notera plus simplement $\mathbf{V}^{\mathrm{opp}} = \mathbf{V}^{\theta\text{-opp}}$ et on dira plus brièvement qu'il s'agit du *dual* de $\mathbf{V}$ .

Clairement, si $\mathbf{V}$ est quasi-associatif de gauche à droite (resp. associatif, quasi-unitaire, unitaire, quasi-catégorique, catégorique), alors son dual $\mathbf{V}^{\mathrm{opp}}$ l'est aussi.

Si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie, si $\theta : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}$ est un foncteur inversible et si $\mathbf{V}$ est un $\boldsymbol{J}$-système tensoriel (resp. un $\boldsymbol{J}$-système tensoriel quasi-associatif de gauche à droite, associatif, quasi-unitaire, unitaire, quasi-catégorique, catégorique), on dit qu'un $\boldsymbol{J}$-morphisme tensoriel (resp. un $\boldsymbol{J}$-morphisme tensoriel quasi-associatif, associatif, quasi-unitaire, unitaire, quasi-catégorique, catégorique) inversible $\boldsymbol{W} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{\theta\text{-opp}}$ est une $\theta$-*symétrie* (resp. une $\theta$-*symétrie quasi-associative de gauche à droite*, une $\theta$-*symétrie associative*, une $\theta$-*symétrie quasi-unitaire*, une $\theta$-*symétrie unitaire*, une $\theta$-*symétrie quasi-catégorique*, une $\theta$-*symétrie catégorique*) et on dit, alors, que $\mathbf{V}$ est $\theta$-*symétrique relativement à* $\boldsymbol{W}$. S'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on dira plus simplement que $\theta$ est une *symétrie* et que $\mathbf{V}$ est *symétrique*.

Si $\mathbb{U}'$ est un univers, il est facile de constater que $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$ est un $\boldsymbol{1}$-système tensoriel catégorique (canoniquement) symétrique (puisqu'évidemment $\boldsymbol{1}^{\mathrm{op}} = \boldsymbol{1}$ et puisque les bi-foncteurs :

$$-_1 \_\_{\mathbb{U}'} -_2 : \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'} \times \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'}$$

et :

$$-_2 \_\_{\mathbb{U}'} -_1 : \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'} \times \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'}$$

sont naturellement équivalents).

**2.4.c.** Si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie, si $\mathbf{V}$ est un $\boldsymbol{J}$-système tensoriel et si $\mathbf{A}$ est un $\boldsymbol{J}$-système $\mathbf{V}$-enrichi, on note $\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}}$ le $\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}$-système $\mathbf{V}^{\mathrm{oppo}}$-enrichi *absolument dual (ou opposé)* de $\mathbf{A}$ , i.e. le système enrichi évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $J$ de $\boldsymbol{J}$ , on a :

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}})_J = \mathbf{A}_J \ ,$$

- pour toute flèche $j : J \to J'$ de $\boldsymbol{J}$ , on a :

$$\exp(\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}}, j) : (\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}})_{J'} \times (\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}})_J \to \mathrm{Pt}((\mathbf{V}^{\mathrm{oppo}})_j),$$

$$=$$

$$\exp(\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}}, j) : \mathbf{A}_{J'} \times \mathbf{A}_J \to \mathrm{Pt}(\mathbf{V}_j) \ ,$$

$$=$$

$$\mathbf{A}_{J'} \times \mathbf{A}_{J} \cong \mathbf{A}_{J} \times \mathbf{A}_{J'} \xrightarrow[\exp(\mathbb{A},\, j)]{} \mathrm{Pt}(\mathbf{V}_{j}),$$

- pour tout couple de flèches consécutives (donc composables) $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de $\boldsymbol{J}$, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_{J}$, pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$ et pour tout élément $A''$ de $\mathbf{A}_{J''}$, on a :

$$\mathrm{comp}(\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}},(A'',j',A',j,A)) : (\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}})_{j'}(A'',A') \otimes^{\mathrm{oppo}}{}_{j',j} (\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}})_{j}(A',A) \to (\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}})_{j \cdot^{\mathrm{op}} j'}(A'', A)$$

$$=$$

$$\mathrm{comp}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}},(A'',j',A',j,A)) : \mathbf{A}_{j}(A,A') \otimes_{j,j'} \mathbf{A}_{j'}(A',A'') \to \mathbf{A}_{j' \cdot j}(A,A'')$$

$$=$$

$$\mathrm{comp}\,(\mathbf{A},(A,j,A',j',A'')) : \mathbf{A}_{j}(A,A') \otimes_{j,j'} \mathbf{A}_{j'}(A',A'') \to \mathbf{A}_{j' \cdot j}(A,A'')$$

(pour simplifier, mais pour éviter toute ambiguïté dans la considération simultanée de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}}$, on pourra noter :

$$\mathrm{comp}(\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}},(A'',j',A',j,A)) = \mathrm{comp}^{\mathrm{oppo}}{}_{A'',j',A',j,A} = \mathrm{comp}^{\mathrm{oppo}}{}_{\dots}\ ,$$

au même titre qu'on a pu noter :

$$\mathrm{comp}\,(\mathbf{A},(A,j,A',j',A'')) = \mathrm{comp}_{A,j,A',j',A''} = \mathrm{comp}_{\dots}\ ).$$

Dans ces conditions, il est clair que si $\mathbf{V}$ est quasi-associatif de gauche à droite (resp. quasi-unitaire, quasi-catégorique) et si $\mathbf{A}$ est associatif (resp. unitaire, catégorique), alors $\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}}$ est associatif (resp. unitaire, catégorique).

Si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie, si $\theta : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}$ est un foncteur inversible, si $\mathbf{V}$ est un $\boldsymbol{J}$-système tensoriel et si $\mathbf{A}$ est un $\boldsymbol{J}$-système $\mathbf{V}$-enrichi, on note $\mathbf{A}^{\theta\text{-opp}}$ le $\boldsymbol{J}$-système $\mathbf{V}^{\theta\text{-opp}}$-enrichi $\theta$-*dual* de $\mathbf{A}$, i.e. le $\boldsymbol{J}$-système $\mathbf{V}^{\theta\text{-opp}}$-enrichi $\mathbf{A}^{\theta\text{-opp}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}})_{\theta}$ obtenu, à partir de $\mathbf{A}^{\mathrm{oppo}}$, par changement d'indexation le long de $\theta$. S'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on notera plus simplement $\mathbf{A}^{\mathrm{opp}} = \mathbf{A}^{\theta\text{-opp}}$ et on dira plus brièvement qu'il s'agit du *dual* de $\mathbf{A}$.

Dans ces conditions, il est clair que, si $\mathbf{V}$ est quasi-associatif de gauche à droite (resp. quasi-unitaire, quasi-catégorique) et si $\mathbf{A}$ est associatif (resp. unitaire, catégorique), alors $\mathbf{A}^{\mathrm{opp}}$ l'est aussi.

Si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie, si $\theta : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}$ est un foncteur inversible, si $\mathbf{V}$ est un $\boldsymbol{J}$-système tensoriel, si $\boldsymbol{W} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{\theta\text{-opp}}$ est une $\theta$-symétrie et si $\mathbf{A}$ est un $\boldsymbol{J}$-système $\mathbf{V}$-enrichi, on note $\mathbf{A}^{\boldsymbol{W},\theta\text{-op}}$ le $\boldsymbol{J}$-système $\mathbf{V}$-enrichi $(\boldsymbol{W},\theta)$-*dual de* $\mathbf{A}$, i.e. le $\boldsymbol{J}$-

système $\mathbf{V}$-enrichi $\mathbf{A}^{W,\theta\text{-op}} = {}_{W^{-1}}(\mathbf{A}^{\theta\text{-opp}})$, obtenu à partir de $\mathbf{A}^{\theta\text{-opp}}$ par changement d'enrichissement le long de $W^{-1}$. S'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on notera plus simplement $\mathbf{A}^{op} = \mathbf{A}^{W,\theta\text{-op}}$ et on dira plus brièvement (et de nouveau) qu'il s'agit du *dual* de $\mathbf{A}$.

Dans ces conditions, il est clair que, si $\mathbf{V}$ est quasi-associatif de gauche à droite (resp. quasi-unitaire, quasi-catégorique), si $W : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{\theta\text{-op}}$ est une $\theta$-symétrie quasi-associative de gauche à droite (resp. quasi-unitaire, quasi-catégorique) et si $\mathbf{A}$ est associatif (resp. unitaire, catégorique), alors son dual $\mathbf{A}^{op}$ l'est aussi.

Si $\mathbb{U}$ est un univers (resp. si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbb{B}$ est un ensemble de graphes à composition), $\mathbf{Esqp}_{\mathbb{U}(,\mathbb{B})}{}^{op}$ désigne donc le $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}}$-enrichi catégorique (canoniquement) dual du $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}}$-enrichi catégorique $\mathbf{Esqp}_{\mathbb{U}(,\mathbb{B})}$.

Alors, si $(\mathbb{U}, \mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités, il est clair que $\mathbf{Esqp}_{\mathbb{U}(,\mathbb{B})}{}^{op}$ s'identifie aussi au $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi catégorique (canoniquement) dual du $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi catégorique auquel $\mathbf{Esqp}_{\mathbb{U}(,\mathbb{B})}$ s'identifie tout autant.

**2.4.d.** Si $\mathbb{U}'$ est un univers, si $\mathbf{A}$ est un $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi et si $\mathbf{B}$ est un $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'}$-enrichi (qu'on identifie au $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi qui s'en déduit par changement d'enrichissement le long de $\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'} \subseteq \mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$), un *$\boldsymbol{1}$-pseudo-morphisme $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi* $\mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est constitué par :

- la donnée d'une application $\mathbf{G}_0 : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$,

- la donnée, pour tous éléments $A$ et $A'$ de $\mathbf{A}_0$, d'un foncteur :

$$\mathbf{G}_{\mathrm{id}(0)}(A, A') : \mathbf{A}_{\mathrm{id}(0)}(A, A') \to \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A), \mathbf{G}_0(A')),$$

et, ce, de sorte que :

- pour tous éléments $A$, $A'$ et $A''$ de $\mathbf{A}_0$, le diagramme (de foncteurs) ci-dessous "commute à une équivalence naturelle près", i.e. on dispose d'au moins une équivalence naturelle (*de composition*) telle que représentée dans le diagramme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_{\mathrm{id}(0)}(A,A')\quad \mathbf{A}_{\mathrm{id}(0)}(A',A'') \arrow[r, "\mathrm{comp}_{\dots}"] \arrow[d, "\mathbf{G}_{\mathrm{id}(0)}(A,A')\ \_\ \mathbf{G}_{\mathrm{id}(0)}(A',A'')"'] \arrow[dr, phantom, "@"] & \mathbf{A}_{\mathrm{id}(0)}(A,A'') \arrow[d, "\mathbf{G}_{\mathrm{id}(0)}(A,A'')"] \\
\mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_{0'}(A'))\quad \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A'),\mathbf{G}_0(A'')) \arrow[r, "\mathrm{comp}_{\dots}"'] & \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_{0'}(A''))
\end{tikzcd}
$$

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des systèmes associatifs, on laisse au lecteur le soin de définir les $\mathbf{1}$-pseudo-morphismes $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichis $\mathbf{G}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ *associatifs*, i.e. pour lesquels la famille des équivalences naturelles de composition est spécifiée et vérifie des axiomes "appropriés" de cohérence.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des systèmes unitaires, on dit que $\mathbf{G}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ est *unitaire* si :

- pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_0$, le diagramme (de foncteurs) ci-dessous "commute à une équivalence naturelle près", i.e. on dispose d'au moins une équivalence naturelle (*d'unitarité*) telle que représentée dans le diagramme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A}_{\mathrm{id}(0)}(A,A) \arrow[d, "\mathbf{G}_{\mathrm{id}(0)}(A,A)"] \\
\mathbf{1}_{\varnothing} \arrow[ur, "\mathrm{u}_{0,A}(\mathbf{A})"] \arrow[dr, "\mathrm{u}_{0,\mathbf{G}_0(A)}(\mathbf{B})"'] \arrow[r, phantom, "@"] & {} \\
 & \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_0(A))
\end{tikzcd}
$$

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des sytèmes catégoriques, on laisse au lecteur le soin de définir les $\mathbf{1}$-pseudo-morphismes $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichis $\mathbf{G}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ *catégoriques*, i.e. à la fois associatifs et unitaires et pour lesquels famille des équivalences naturelles de composition et la famille des équivalences naturelles d'unitarité sont spécifiées et sont soumises à des axiomes "appropriés" de cohérence (séparément et entre elles).

Si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités (resp. si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités et si $\mathbb{B}$ est un ensemble de graphes à composition), on note :

$$\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})} : \mathbf{Esq}_{\mathbb{U}(,\,\mathbb{B})}{}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'}$$

le ***1***-pseudo-morphisme $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi catégorique évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute esquisse ($\mathbb{B}$-)projective $\mathbb{U}$-petite $\mathbf{E}$, on a :

$$(\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathit{0}}(\mathbf{E}) = \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}),$$

- pour toutes esquisses ($\mathbb{B}$-)projectives $\mathbb{U}$-petites $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$, le foncteur :

$$(\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\mathbf{E}',\mathbf{E}) : \boldsymbol{Rep}(\mathbf{E},\mathbf{E}') \to \boldsymbol{Fonc}(\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}'),\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))$$

  est le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

  - pour toute représentation $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, on a :

$$((\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\mathbf{E}',\mathbf{E}))(\rho) : (\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathit{0}}(\mathbf{E}') \to (\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathit{0}}(\mathbf{E})$$

$$=$$

$$\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho) : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}') \to \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}),$$

  - pour toutes représentations $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ et pour toute métamorphose naturelle $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$, on a :

$$\begin{array}{ccc}
\big((\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\mathbf{E}',\mathbf{E})\big)(m) & & \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(m) \\
: & & : \\
\big((\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\mathbf{E}',\mathbf{E})\big)(\rho_1) & & \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho_1) \\
\Rightarrow & = & \Rightarrow \\
\big((\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\mathbf{E}',\mathbf{E})\big)(\rho_2) & & \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\rho_2).
\end{array}$$

Si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités (resp. si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités et si $\mathbb{B}$ est un ensemble de graphes à composition), on note :

$$\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})} : \mathbf{Esq}_{\mathbb{U}(,\,\mathbb{B})}{}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'}$$

le ***1***-morphisme (et donc le ***1***-pseudo-morphisme) $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi catégorique évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute esquisse ($\mathbb{B}$-)projective $\mathbb{U}$-petite $\mathbf{E}$, on a :

$$(\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})})_{\mathit{0}}(\mathbf{E}) = \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}),$$

- pour toutes esquisse ($\mathbb{B}$-)projectives $\mathbb{U}$-petites $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$, le foncteur :

$$(\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E}',\mathbf{E}) : \boldsymbol{Rep}(\mathbf{E},\mathbf{E}') \to \boldsymbol{Fonc}(\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}',\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}),\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))$$

est le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

- pour toute représentation $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, on a :

$$((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E}',\mathbf{E}))(\rho) : (\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_0(\mathbf{E}') \to (\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_0(\mathbf{E})$$

$$=$$

$$\boldsymbol{Mod}(\rho,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}',\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}),$$

- pour toutes représentations $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ et pour toute métamorphose naturelle $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$, on a :

$$\begin{array}{ccc}
\left((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E}',\mathbf{E})\right)(m) & & \boldsymbol{Mod}(m,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \\
: & & : \\
\left((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E}',\mathbf{E})\right)(\rho_1) & & \boldsymbol{Mod}(\rho_1,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \\
\Rightarrow & = & \Rightarrow \\
\left((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E}',\mathbf{E})\right)(\rho_2) & & \boldsymbol{Mod}(\rho_2,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})
\end{array}$$

**2.4.e.** Si $\mathbb{U}'$ est un univers, si $\mathbf{A}$ est un $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi, si $\mathbf{B}$ est un $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'}$-enrichi unitaire (qu'on identifie au $\boldsymbol{1}$-système $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi unitaire qui s'en déduit par changement d'enrichissement le long de $\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'} \subseteq \mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$), si $\mathbf{G}, \mathbf{G}' : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sont deux *$\boldsymbol{1}$-pseudo-morphismes $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichis*, une *$\boldsymbol{1}$-transformation pseudo-naturelle $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichie* $\boldsymbol{T} : \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{G}' : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est constituée par :

- la donnée, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_0$, d'un foncteur :

$$\boldsymbol{T}_{\to}(A) : \boldsymbol{1}_{\varnothing} \to \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A), \mathbf{G}'_0(A)),$$

- la donnée, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_0$, d'un foncteur :

$$\boldsymbol{T}_{\leftarrow}(A) : \boldsymbol{1}_{\varnothing} \to \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}'_0(A), \mathbf{G}_0(A)),$$

et, ce, de sorte que :

- le diagramme (de foncteurs) ci-dessous "commute à une équivalence naturelle près", i.e. on dispose d'au moins une équivalence naturelle telle que représentée ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}'_0(A)) \quad \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}'_0(A),\mathbf{G}_0(A)) \arrow[dd, "\mathrm{comp}_{...}"] \\
\mathbf{1}_\varnothing _ \mathbf{1}_\varnothing \arrow[ur, "\boldsymbol{T}_{\to}(A)_\boldsymbol{T}_{\leftarrow}(A)"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\cong"] & \\
\mathbf{1}_\varnothing \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\mathrm{u}_{0,\mathbf{G}(A)}(\mathbf{B})"'] & \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_0(A))
\end{tikzcd}$$

- le diagramme (de foncteurs) ci-dessous "commute à une équivalence naturelle près", i.e. on dispose d'au moins une équivalence naturelle telle que représentée ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}_\varnothing \arrow[r, "\mathrm{u}_{0,\mathbf{G}(A)}(\mathbf{B})"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_0(A)) \\
\mathbf{1}_\varnothing _ \mathbf{1}_\varnothing \arrow[dr, "\boldsymbol{T}_{\leftarrow}(A)_\boldsymbol{T}_{\to}(A)"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\cong"] & \\
 & \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}'_0(A),\mathbf{G}_0(A)) _ \mathbf{B}_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}'_0(A)) \arrow[uu, "\mathrm{comp}_{...}"']
\end{tikzcd}$$

- le diagramme (de foncteurs) ci-dessous "commute à une équivalence naturelle près", i.e. on dispose d'au moins une équivalence naturelle telle que représentée ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{A}_{\mathrm{id}\,(0)}(A, A') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}'_0(A),\mathbf{G}'_0(A')) \arrow[d, "\cong"] & & \mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_0(A')) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathbf{1}_{\varnothing}\quad \mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}'_0(A),\mathbf{G}'_0(A')) \arrow[d, "\boldsymbol{T}_{\rightarrow}(A)\quad \mathrm{id}\,(...)"] & & \mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_0(A'))\quad \mathbf{1}_{\varnothing} \arrow[d, "\mathrm{id}\,(...) \times \boldsymbol{T}_{\rightarrow}(A')"'] \\
\mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}'_0(A)) \times \mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}'_0(A),\mathbf{G}'_0(A')) \arrow[dr, "\mathrm{comp}_{...}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\cong}{\Longrightarrow}"] & & \mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}_0(A')) \times \mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}_0(A'),\mathbf{G}'_0(A')) \arrow[dl, "\mathrm{comp}_{...}"] \\
 & \mathbf{B}_{\mathrm{id}\,(0)}(\mathbf{G}_0(A),\mathbf{G}'_0(A')) &
\end{tikzcd}
$$

Si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités (resp. si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités et si $\mathbb{B}$ est un ensemble de graphes à composition), on désigne par :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{fibmod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})} : \mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})} \Rightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{mod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})} : \mathbf{Esq}_{\mathbb{U}(,\,\mathbb{B})}{}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'}$$

la $\mathbf{1}$-transformation pseudo-naturelle $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichie évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour toute esquisse $(\mathbb{B})$-projective $\mathbb{U}$-petite $\mathbf{E}$, le foncteur :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{fibmod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})\,\rightarrow}(\mathbf{E}) : \mathbf{1}_{\varnothing} \to \boldsymbol{Fonc}\,(\,\mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})}\,(\mathbf{E})\,,\,\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})}\,(\mathbf{E})\,)$$

$$=$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{fibmod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})\,\rightarrow}(\mathbf{E}) : \mathbf{1}_{\varnothing} \to \boldsymbol{Fonc}\,(\,\boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})\,,\,\boldsymbol{Mod}\,(\mathbf{E}\,,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\,)\,)$$

  est celui évidemment défini lorsqu'on stipule que :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{fibmod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})\,\rightarrow}(\mathbf{E})\,(0) = (\mathbf{E}\,/\!/\,\text{-}\,)_{\mathbb{U}} : \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}) \to \boldsymbol{Mod}\,(\mathbf{E}\,,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\,)\,,$$

- pour toute esquisse $(\mathbb{B})$-projective $\mathbb{U}$-petite $\mathbf{E}$, le foncteur :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{fibmod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})\,\leftarrow}(\mathbf{E}) : \boldsymbol{1}_{\varnothing} \to \boldsymbol{Fonc}\,(\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})}(\mathbf{E}),\, \mathbf{G}_{\mathbf{fib},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})}(\mathbf{E}))$$

$$=$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{fibmod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})\,\leftarrow}(\mathbf{E}) : \boldsymbol{1}_{\varnothing} \to \boldsymbol{Fonc}\,(\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}),\, \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))$$

est celui évidemment défini lorsqu'on stipule que :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{fibmod},\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})\,\leftarrow}(\mathbf{E})\,(0) = (\mathbf{E} \backslash\backslash -)_{\mathbb{U}} : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Fib}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})\,.$$

# 3. Lemme de Yoneda pour les prototypes projectifs et lemme de Yoneda pour les esquisses projectives.

## 3.1. Fonctionnalités, visibilités et limites projectives.

**3.1.a.** Si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition, alors une $\boldsymbol{B}$-*fonctionnalité* $f = ((f_B)_{B \in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})}, (f_b)_{b \in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{B})})$ est constituée par :

- la donnée, pour point $B$ de $\boldsymbol{B}$, d'un ensemble $f_B$,
- la donnée, pour tous points $B$ et $B'$ de $\boldsymbol{B}$ et pour toute flèche $b : B \to B'$ de $\boldsymbol{B}$, d'une application $f_b : f_B \to f_{B'}$,

et, ce, de sorte que :

pour tout point $B$ de $\boldsymbol{B}$ et toute flèche identité $b : B =\!\!\to B$ de $\boldsymbol{B}$, on a :

$$f_b = \mathrm{id}\,(f_B) : f_B =\!\!\to f_B\,,$$

- pour tous points $B$, $B'$ et $B''$ de $\boldsymbol{B}$ et pour tout couple composable $(b : B \to B', b' : B' \to B'')$ de flèches de $\boldsymbol{B}$, on a :

$$f_{(b'.b)} = f_{b'} \circ f_b\,.$$

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers, on dit qu'une telle $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité $f$ est $\mathbb{U}$-*petite point par point* si :

- pour tout point $B$ de $\boldsymbol{B}$, l'ensemble $f_B$ est $\mathbb{U}$-petit.

Clairement, les $\boldsymbol{B}$-fonctionnalités $\mathbb{U}$-petites point par point s'identifient exactement aux foncteurs de $\boldsymbol{B}$ vers $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$.

**3.1.b.** Si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition, si $f$ est une $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité et si $X$ est un ensemble, alors une $\boldsymbol{B}$-*visibilité (projective)* $v : X <\!| f$ *de* $X$ *vers* $f$ est constituée par :

- la donnée, pour tout point $B$ de $\boldsymbol{B}$, d'une application $v_B : X \to f_B$, et, ce, de sorte que :
  - pour tous points $B$ et $B'$ de $\boldsymbol{B}$ et pour toute flèche $b : B \to B'$ de $\boldsymbol{B}$, on a : $f_b \circ v_B = v_{B'}$.

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers, les $\boldsymbol{B}$-visibilités des ensembles $\mathbb{U}$-petits vers les $\boldsymbol{B}$-fonctionnalités $\mathbb{U}$-petites point par point s'identifient exactement aux cônes $\boldsymbol{B}$-projectifs à valeurs dans $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$.

**3.1.c.** Si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition et si $f$ est une $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité, on désigne par $\mathrm{EnsPCan}(f)$ l'*ensemble ("projectif") canoniquement associé à* $f$, i.e. l'ensemble évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- ses éléments sont les familles $(x_B)_{B \in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})}$ telles que :
  - pour tout point $B$ de $\boldsymbol{B}$, on a $x_B \in f_B$,
  - pour tous points $B$ et $B'$ de $\boldsymbol{B}$ et pour toute flèche $b : B \to B'$ de $\boldsymbol{B}$, on a :

$$f_b(x_B) = x_{B'} .$$

Alors, on désigne par $\mathrm{vispcan}(f) : \mathrm{EnsPCan}(f) <\!| f$ la $\boldsymbol{B}$-*visibilité (projective) canoniquement associée à* $f$, i.e. la $\boldsymbol{B}$-visibilité évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point $B'$ de $\boldsymbol{B}$, l'application $\mathrm{vispcan}(f)_{B'} : \mathrm{EnsPCan}(f) \to f_{B'}$ est celle bien définie lorsqu'on stipule que :
  - pour tout élément $(x_B)_{B \in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})} \in \mathrm{EnsPCan}(f)$, on a :

$$\big(\mathrm{vispcan}(f)_{B'}\big)\big((x_B)_{B \in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})}\big) = x_{B'} .$$

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition $\mathbb{U}$-petit et si $f$ est une $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité $\mathbb{U}$-petite point par point, alors l'ensemble $\mathrm{EnsPCan}(f)$ est évidemment $\mathbb{U}$-petit. Ainsi, la $\boldsymbol{B}$-visibilité $\mathrm{vispcan}(f)$ s'identifie à un cône $\boldsymbol{B}$-projectif à valeurs dans $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ : il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un cône $\boldsymbol{B}$-projectif limite de $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$.

**3.1.d.** Si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition, si $f$ et $f'$ sont deux $\boldsymbol{B}$-fonctionnalités, si $X$ et $X'$ sont deux ensembles et si $v : X <\!| f$ et $v' : X' <\!| f'$ sont deux $\boldsymbol{B}$-visibilités, alors une *isomorphie* $i = (i^{\times}, (i_B)_{B \in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})}) : v \approx> v'$ de $v$ vers $v'$ est constituée par :

- la donnée d'une bijection $i^{\times} : X \to X'$,
- la donnée, pour tout point $B$ de $\boldsymbol{B}$, d'une bijection $i_B : f_B \to f_{B'}$,

et, ce, de sorte que :

- pour tout point $B$ de $\boldsymbol{B}$, on a $v'_B \circ i^{\times} = i_B \circ v_B$,
- pour tous points $B$ et $B'$ de $\boldsymbol{B}$ et pour toute flèche $b : B \to B'$ de $\boldsymbol{B}$, on a $f'_b \circ i_B = i_{B'} \circ f_b$.

On dit bien entendu que $v$ et $v'$ sont *isomorphes* s'il existe une telle isomorphie de $v$ vers $v'$.

Plus précisément encore, si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition, si $f$ est une $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité, si $X$ et $X'$ sont deux ensembles et si $v : X <\!| f$ et $v' : X' <\!| f$ sont deux $\boldsymbol{B}$-visibilités, une *isomorphie* $i = (i^{\times}, (i_B)_{B \in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})}) : v \approx> v'$ de $v$ vers $v'$ est dite *stricte* et *définie par* (la seule bijection) $i^{\times} : X \to X'$ si :

- pour tout $B$ de $\boldsymbol{B}$, on a $v_B = \mathrm{id}(f_B) : f_B =\!\!\to f_B$.

On dit bien entendu que $v$ et $v'$ sont *strictement isomorphes* s'il existe une telle isomorphie stricte de $v$ vers $v'$.

En particulier, il est facile de vérifier que :

PROPOSITION 2. *Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition $\mathbb{U}$-petit et si $c$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif, à valeurs dans $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, alors $c$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif limite si, et seulement si, la $\boldsymbol{B}$-visibilité à laquelle $c$ s'identifie est isomorphe à une $\boldsymbol{B}$-visibilité canonique.*

**3.1.e.** Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie et si $A$ et $A'$ sont deux points de $\boldsymbol{A}$, rappelons qu'on on note (très classiquement) :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, A') = \boldsymbol{A}(A, A') = \{\, a \in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{A}) \mid a : A \to A' \,\} .$$

Si $A$, $A'$ et $A''$ sont trois points de $\boldsymbol{A}$ et si $a' : A' \to A''$ est une flèche de $\boldsymbol{A}$, on note (aussi classiquement) :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, a') = \boldsymbol{A}(A, a') : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, A') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, A'')$$

l'application évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour toute flèche $a : A \to A'$ de $\boldsymbol{A}$ (i.e. pour tout élément de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, A')$), on a :

$$\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, a')\big)(a) = a' \,.\, a \,.$$

Si $A$, $A'$ et $A''$ sont trois point de $\boldsymbol{A}$ et si $a : A \to A'$ est une flèche de $\boldsymbol{A}$, on note (tout autant classiquement) :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(a, A'') = \boldsymbol{A}(a, A'') : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A', A'') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, A'')$$

l'application évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour toute flèche $a' : A' \to A''$ de $\boldsymbol{A}$ (i.e. pour tout élément de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A', A'')$), on a :

$$\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(a, A'')\big)(a') = a' \,.\, a \,.$$

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie localement $\mathbb{U}$-petite et si $A$ est un point de $\boldsymbol{A}$, on note (très classiquement encore) :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\text{-}) = \boldsymbol{A}(A,\text{-}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $A'$ de $\boldsymbol{A}$, on a $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\text{-})(A') = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, A')$,
- pour tous points $A'$ et $A''$ de $\boldsymbol{A}$ et pour toute flèche $a' : A' \to A''$ de $\boldsymbol{A}$, on a $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\text{-})(a') = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, a')$.

Si $A$ et $A'$ sont deux points de $\boldsymbol{A}$ et si $a : A \to A'$ est une flèche de $\boldsymbol{A}$, on note :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(a,\text{-}) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A',\text{-}) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\text{-}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

$$=$$

$$\boldsymbol{A}(a,\text{-}) : \boldsymbol{A}(A',\text{-}) \Rightarrow \boldsymbol{A}(A,\text{-}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point $A''$ de $\boldsymbol{A}$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(a,\text{-})(A'') = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(a, A'') : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A', A'') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, A'') \,.$$

**3.1.f.** Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie, si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition, si $c = (\,c^{\times}(B) : c^{\times} \to c(B)\,)_{B \in \boldsymbol{B}}$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ et si $A$ est un point de $\boldsymbol{A}$, il est clair que :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c(\text{-}))$$
$$=$$
$$\boldsymbol{A}(A, c(\text{-}))$$
$$=$$
$$\big(\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c(B))\big)_{B\in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})}, \big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c(b))\big)_{b\in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{B})}\big)$$

est une $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité, tandis que :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c^{\times}(\text{-}))$$
$$=$$
$$\boldsymbol{A}(A, c^{\times}(\text{-}))$$
$$=$$
$$\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c^{\times}(B))\big)_{B\in \mathrm{Pt}(\boldsymbol{B})} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c^{\times}) <\!| \ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c(\text{-}))$$

est une $\boldsymbol{B}$-visibilité de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c^{\times})$ vers la $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c(\text{-}))$.

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie localement $\mathbb{U}$-petite, si $A$ est un point de $\boldsymbol{A}$, si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition et si $c$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif, à valeurs dans $\boldsymbol{A}$ et de base le foncteur $\beta : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$, alors :

- le cône $\boldsymbol{B}$-projectif $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\text{-})(c) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c)$, à valeurs dans $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, image de $c$ par le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\text{-}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, s'identifie évidemment à la $\boldsymbol{B}$-visibilité $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c^{\times}(\text{-}))$,
- sa base $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\text{-}) \circ \beta = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\beta) : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ s'identifie évidemment à la $\boldsymbol{B}$-fonctionnalité $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,c(\text{-}))$.

**3.1.g.** Il est très facile (et très classique) d'établir que :

PROPOSITION 3. *Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie, si $\boldsymbol{B}$ est un graphe à composition et si $c$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif à valeurs dans $\boldsymbol{A}$, alors $c$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif limite dans $\boldsymbol{A}$ si, et seulement si, pour tout point $A$ de $\boldsymbol{A}$, la $\boldsymbol{B}$-visibilité :*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c^{\times}(\text{-})) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c^{\times}) <\!| \ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, c(\text{-}))$$

*est isomorphe à une $\boldsymbol{B}$-visibilité canonique.*

En particulier, de la PROPOSITION 2 et de la PROPOSITION 3, il résulte immédiatement que :

COROLLAIRE. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\boldsymbol{\mathsf{A}}$ *est une catégorie localement* $\mathbb{U}$ *-petite, si* $\boldsymbol{\mathsf{B}}$ *est un graphe à composition* $\mathbb{U}$ *-petit et si* $c$ *est un cône* $\boldsymbol{\mathsf{B}}$ *-projectif à valeurs dans* $\boldsymbol{\mathsf{A}}$ *, alors* $c$ *est un cône* $\boldsymbol{\mathsf{B}}$ *-projectif limite dans* $\boldsymbol{\mathsf{A}}$ *si, et seulement si, pour tout point* $A$ *de* $\boldsymbol{\mathsf{A}}$ *, le cône* $\boldsymbol{\mathsf{B}}$ *-projectif image* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\mathsf{A}}}(A, c)$ *est un cône* $\boldsymbol{\mathsf{B}}$ *-projectif limite dans* $\boldsymbol{\mathsf{Ens}}_{\mathbb{U}}$ .

## 3.2. Lemme de Yoneda pour les prototypes projectifs.

**3.2.a.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, on dit qu'un prototype projectif $\mathbf{P}$ est *localement* $\mathbb{U}$ *-petit* si :

- son support $\underline{\mathbf{P}}$ est une catégorie localement $\mathbb{U}$ -petite,
- la base-type de chacun de ses cônes projectifs (limites) distingués est un graphe à composition $\mathbb{U}$ -petit.

**3.2.b.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{P}$ est un prototype projectif localement $\mathbb{U}$ -petit et si $P$ est un point de $\mathbf{P}$, on note :

$$\mathbf{P}(P,\text{-}) : \mathbf{P} \to \boldsymbol{\mathsf{Ens}}_{\mathbb{U}}$$

le modèle évidemment obtenu (en vertu du COROLLAIRE de la PROPOSITION 3) lorsqu'on impose que :

- pour tout point $P'$ de $\mathbf{P}$, on a :

$$\mathbf{P}(P,\text{-})(P') = \mathbf{P}(P, P') = \underline{\mathbf{P}}(P, P') = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P, P'),$$

- pour tous points $P'$ et $P''$ de $\mathbf{P}$ et toute flèche $p' : P' \to P''$ de $\mathbf{P}$, on a :

$$\mathbf{P}(P,\text{-})(p') = \mathbf{P}(P, p') : \mathbf{P}(P, P') \to \mathbf{P}(P, P'')$$

$$=$$

$$\underline{\mathbf{P}}(P, p') = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P, p') : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P, P') \to \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P, P''),$$

autrement dit, lorsqu'on stipule que :

$$_{\wedge}\underline{\mathbf{P}(P,\text{-})} = \underline{\mathbf{P}}(P,\text{-}) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P,\text{-}) : \underline{\mathbf{P}} \to \boldsymbol{\mathsf{Ens}}_{\mathbb{U}} .$$

De même, si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{P}$ est un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit, si $P$ et $P'$ sont deux points de $\mathbf{P}$ et si $p : P \to P'$ est une flèche de $\mathbf{P}$, on désigne par :

$$\mathbf{P}(p,\text{-}) : \mathbf{P}(P',\text{-}) \Rightarrow \mathbf{P}(P,\text{-}) : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

la métamorphose naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point $P''$ de $\mathbf{P}$, on a :

$$\mathbf{P}(p,\text{-})(P'') = \mathbf{P}(p,P'') : \mathbf{P}(P',P'') \to \mathbf{P}(P,P'')$$
$$=$$
$$\underline{\mathbf{P}}(p,P'') : \underline{\mathbf{P}}(P',P'') \to \underline{\mathbf{P}}(P,P'')$$

autrement dit, lorsqu'on stipule que :

$${}_{\wedge}\underline{\mathbf{P}(p,\text{-})} = \underline{\mathbf{P}}(p,\text{-}) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(p,\text{-}) : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P',\text{-}) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P,\text{-}) : \underline{\mathbf{P}} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} \ .$$

**3.2.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{P}$ est un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit, on désigne par :

$$\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) : \underline{\mathbf{P}} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$$

le *foncteur de Yoneda intrinsèque à* $\mathbf{P}$ *(et* $\mathbb{U}$*)*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $P$ de $\mathbf{P}$, on a :

$$\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})\right)(P) = \mathbf{P}(P,\text{-}) : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} \, ,$$

- pour tous points $P$ et $P'$ de $\mathbf{P}$ et toute flèche $p : P \to P'$ de $\mathbf{P}$, on a :

$$\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})\right)(p) = \mathbf{P}(p,\text{-}) : \mathbf{P}(P',\text{-}) \Rightarrow \mathbf{P}(P,\text{-}) : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} \, .$$

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{P} = \boldsymbol{A}$ est une catégorie localement $\mathbb{U}$-petite (qui s'identifie bien à un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit trivial), il est clair que :

$$\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{A}) : \underline{\boldsymbol{A}} \to \boldsymbol{Mod}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$$
$$=$$
$$\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Fonc}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$$

est le très classique "plongement de Yoneda" (intrinsèque à la seule structure de catégorie sur $\boldsymbol{A}$).

Plus précisément encore, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{P}$ est un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit (alors sa catégorie support $\underline{\mathbf{P}}$ s'identifie à un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit trivial), il est clair que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{op} \arrow[d, "\subseteq"] \\
\underline{\mathbf{P}} \arrow[ur, "\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})"] \arrow[r, "\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\underline{\mathbf{P}})"'] & \boldsymbol{Fonc}(\underline{\mathbf{P}},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{op}
\end{tikzcd}$$

**3.2.d.** Prouvons que :

PROPOSITION 4 ("lemme de Yoneda intrinsèque aux prototypes projectifs"). *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers et si* $\mathbf{P}$ *est un prototype projectif localement* $\mathbb{U}$*-petit, naturellement en tout point* $P$ *de* $\mathbf{P}$ *et naturellement en tout modèle* $\mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *, on dispose d'une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\big(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P),\mu\big) \xrightarrow{\cong} \mu(P)\,.$$

PREUVE. En effet, naturellement en tout point $P$ de $\mathbf{P}$ et en tout modèle $\mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on dispose de l'application (permettant d'associer *intrinsèquement* à chaque *homomorphisme* de modèles $\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P) \Rightarrow \mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ un *élément* de $\mu(P)$) :

$$\mathrm{homomelemint}(P,\mu) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\big(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P),\mu\big) \to \mu(P)$$

évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout homomorphisme :

$$h : \underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P) \Rightarrow \mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

  on a :

$$\mathrm{homomelemint}(P,\mu)(h) = \big(h(P)\big)\big(\mathrm{id}(P)\big)$$

  autrement dit :

$$h(P) : \left(\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P)\right)(P) \;\to\; \mu(P)$$
$$=$$
$$h(P) : \mathbf{P}(P,P) \;\to\; \mu(P)$$
$$=$$
$$h(P) : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P,P) \;\to\; \mu(P)$$
$$\mathrm{id}(P) \;\mapsto\; \text{homomelemint}(P,\mu)\,.$$

De même, naturellement en tout point $P$ de $\mathbf{P}$ et en tout modèle $\mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on dispose de l'application (permettant d'associer *intrinsèquement* à chaque *élément* de $\mu(P)$ un *homomorphisme* de modèles $\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P) \Rightarrow \mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ ) :

$$\text{elemhomomint}(P,\mu) : \mu(P) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P),\mu\right)$$

évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout élément $x \in \mu(P)$, la transformation naturelle : $\text{elemhomomint}(P,\mu)(x) : \underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P) \Rightarrow \mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est celle évidemment obtenue lorsqu'on stipule que :
    - pour tout point $P'$ de $\mathbf{P}$, on a :

$$\left(\text{elemhomomint}(P,\mu)(x)\right)(P') : \left(\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P)\right)(P') \;\to\; \mu(P')$$
$$=$$
$$\left(\text{elemhomomint}(P,\mu)(x)\right)(P') : \mathbf{P}(P,P') \;\to\; \mu(P')$$
$$=$$
$$\left(\text{elemhomomint}(P,\mu)(x)\right)(P') : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P,P') \;\to\; \mu(P')$$
$$(p' : P \to P') \;\mapsto\; \mu(p')(x)\,.$$

Et il est clair qu'il s'agit bien là de deux applications inverses l'une de l'autre. FIN DE LA PREUVE.

On en déduit immédiatement que :

COROLLAIRE. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers et si* $\mathbf{P}$ *est un prototype projectif localement* $\mathbb{U}$ *-petit, alors le foncteur de Yoneda intrinsèque à* $\mathbf{P}$ *:*

$$\text{Yonint}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) : \underline{\mathbf{P}} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$$

*est un foncteur fidèle (i.e. "injectif Hom par Hom") et plein (i.e. "surjectif Hom par Hom").*

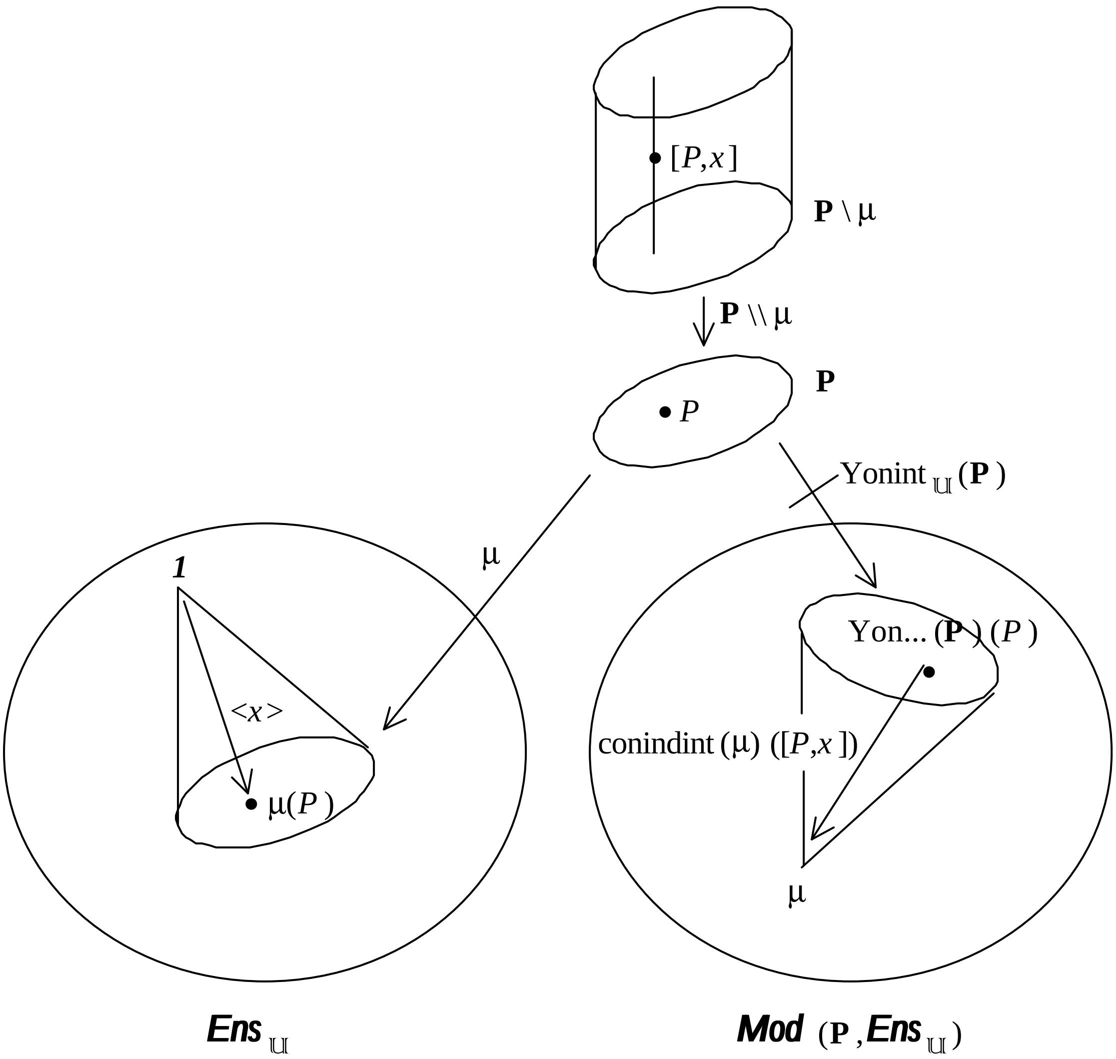
PREUVE. Si $P$ et $P'$ sont deux points de $\mathbf{P}$, il suffit de constater que la bijection (explicitée dans la PREUVE de la PROPOSITION 4, où on prend $\mu = \underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P') = \mathbf{P}(P',-) : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}$ ) :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(P',P) \\ = \\ \left(\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P')\right)(P) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \text{elemhomomint}\left(P,\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P')\right)} \\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P),\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P')) \end{array}$$

est la restriction à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(P',P)$ du foncteur $\underline{\text{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})$. FIN DE LA PREUVE.

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{P} = \boldsymbol{A}$ est une catégorie localement $\mathbb{U}$-petite (qui s'identifie bien à un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit trivial), la PROPOSITION 4 n'est ni plus ni moins que le très classique "lemme de Yoneda" intrinsèque aux seules structures de catégories. De même, le COROLLAIRE de cette PROPOSITION 4 exprime très classiquement, dans ce cas, que le "plongement de Yoneda" intrinsèque aux seules structures de catégories est plein et fidèle.

**3.2.e.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{P}$ est un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit et si $\mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle (i.e. un point de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$), on désigne par $\mathrm{conindint}(\mu)$ le *cône inductif intrinsèque à* $\mu$ représenté dans le schéma ci-dessous (où, pour tout ensemble $X$ et tout élément $x \in X$, on désigne par $<x> : \boldsymbol{1} = \{\boldsymbol{0}\} \to X$ l'application telle que $<x>(\boldsymbol{0}) = x$ ) :




i.e. le cône inductif à valeurs dans $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- sa base-type est le graphe à composition (dont il est facile de voir que c'est une catégorie) $(\underline{\mathbf{P}\setminus\mu})^{op}$, dual du support de l'esquisse projective $\mathbf{P}\setminus\mu$ (éclatement de $\mathbf{P}$ par $\mu$),
- sa base est le foncteur composé :

$$(\underline{\mathbf{P}\setminus\mu})^{op} \xrightarrow{(\underline{\mathbf{P}\setminus\setminus\mu})^{op}} \underline{\mathbf{P}}^{op} \xrightarrow{(\underline{\mathrm{Yonint}}(\mathbf{P}))^{op}} \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

- son sommet est le point $\mu$ de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ ,

- pour tout point $P$ de $\mathbf{P}$ et pour tout élément $x$ de $\mu(\mathbf{P})$ (i.e. pour tout point $[P,x]$ de $\mathbf{P}\backslash\mu$), la flèche :

$$\mathrm{elemhomomint}(P,\mu)(x) : \underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P) \to \mu$$

est son induction relative à $[P,x]$.

Dans ces conditions, prouvons que :

PROPOSITION 5 ("densité du foncteur de Yoneda intrinsèque aux prototypes projectifs"). *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype projectif localement* $\mathbb{U}$*-petit et si* $\mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *est un modèle, alors le cône inductif intrinsèque associé à* $\mu$ *est un cône inductif limite de* $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$.

PREUVE. Il suffit évidemment (par dualité) de prouver que $(\mathrm{conindint}(\mu))^{\mathrm{op}}$ est un cône projectif limite de $(\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))^{\mathrm{op}}$. En vertu de la PROPOSITION 3, il suffit donc d'établir que, pour tout modèle $\mu' : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, la $(\underline{\mathbf{P}\backslash\mu})$-visibilité :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mathrm{conindint}(\mu)^{+}(-),\mu'\right)$$

$$:$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mu,\mu'\right)$$

$$<|$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu')$$

est strictement isomorphe à la $(\underline{\mathbf{P}\backslash\mu})$-visibilité canonique :

$$\mathrm{vispcan}\left(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu'\right)\right)$$

$$:$$

$$\mathrm{EnsPCan}\left(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu'\right)\right)$$

$$<|$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu'\right).$$

Pour ce faire, on procède comme suit :

**a)** Supposons que $h \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mu,\mu'\right)$, i.e. que $h : \mu \to \mu'$ est une flèche de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$.

Alors il est trivial de vérifier que la famille de composées :

$$\left(h \,.\, \mathrm{conindint}([P,x])\right)_{[P,x] \in \mathrm{Pt}(\mathbf{P}\backslash\mu)}$$

est un élément de $\mathrm{EnsPCan}\left(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu'\right)\right)$.

On dispose donc de l'application :

$$i^{\times} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mu,\mu') \to \mathrm{EnsPCan}\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu')\big)$$

$$h \mapsto \big(h\,.\,\mathrm{conindint}([P,x])\big)_{[P,x]\in \mathrm{Pt}(\mathbf{P}\backslash\mu)} .$$

**b)** Supposons que $k = \big(k_{[P,x]}\big)_{[P,x]\in \mathrm{Pt}(\mathbf{P}\backslash\mu)}$ est une famille appartenant à l'ensemble $\mathrm{EnsPCan}\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu')\big)$.

Alors, pour tout point $P$ de $\mathbf{P}$ et pour tout élément $x \in \mu(P)$, à la flèche de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ :

$$k_{[P,x]} : \mathrm{conindint}(\mu)([P,x]) \to \mu'$$

$$=$$

$$k_{[P,x]} : \underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(P) \to \mu'$$

correspond, en vertu de la PROPOSITION 4, un élément :

$$m_{k,P,x} = \big(\mathrm{homomelemint}(P,\mu')\big)(k_{[P,x]}) \in \mu'(P) .$$

Ainsi, pour tout point $P$ de $\mathbf{P}$, on dispose de l'application :

$$m_{k,P} : \mu(P) \to \mu'(P)$$

$$x \mapsto m_{k,P,x} .$$

De la sorte, il est facile de vérifier qu'on définit une métamorphose naturelle :

$$m_k : \mu \Rightarrow \mu' : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

lorsqu'on stipule que :

- pour tout point $P$ de $\mathbf{P}$, on a $m_k(P) = m_{k,P} : \mu(P) \to \mu'(P)$.

On dispose donc, maintenant, de l'application :

$$i'^{\times} : \mathrm{EnsPCan}\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conindint}(\mu)(-),\mu')\big) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mu,\mu')$$

$$k \mapsto m_k .$$

**c)** Il est trivial de constater que les applications $i^{\times}$ et $i'^{\times}$ sont inverses l'une de l'autre et, par conséquent, que $i^{\times}$ est une bijection qui définit l'isomorphie stricte recherchée. FIN DE LA PREUVE.

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{P} = \boldsymbol{A}$ est une catégorie localement $\mathbb{U}$-petite (qui s'identifie bien à un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit trivial), la PROPOSITION 5 n'exprime ni plus ni moins que la très classique "densité du foncteur de Yoneda" intrinsèque aux seules structures de catégories.

**3.2.f.** Etablissons que :

PROPOSITION 6. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\mathbf{P}$ *est un prototype projectif localement* $\mathbb{U}$*-petit et si* $c$ *est un cône projectif distingué (donc limite) dans* $\mathbf{P}$*, alors le cône projectif image* $\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})\right)(c)$ *est un cône projectif limite de* $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$.

PREUVE. Notons $\boldsymbol{B}$ le graphe à composition $\mathbb{U}$-petit qui est base-type de $c$. En vertu de la PROPOSITION 3, il suffit d'établir que, pour tout modèle $\mu:\mathbf{P}\to\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, la $\boldsymbol{B}$-visibilité :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})\left(c^{\times}(\text{-})\right),\mu\right)$$
$$:$$
$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})\left(c^{\times}\right),\mu\right)$$
$$<|$$
$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})\left(c(\text{-})\right),\mu\right)$$

est isomorphe à une $\boldsymbol{B}$-visibilité canonique.

Pour ce faire, on procède comme suit :

**a)** La $\boldsymbol{B}$-visibilité $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})\left(c^{\times}(\text{-})\right),\mu\right)$ est, en vertu de la PROPOSITION 4, évidemment isomorphe à la $\boldsymbol{B}$-visibilité :

$$\mu(c^{\times}(\text{-}))$$
$$:$$
$$\mu(c^{\times})$$
$$<|$$
$$\mu(c(\text{-}))$$

qui s'identifie au cône $\boldsymbol{B}$-projectif $\mu(c)$, image de $c$ par $\mu:\mathbf{P}\to\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$.

**b)** La $\boldsymbol{B}$-visibilité $\mu(c^{\times}(\text{-}))$ est, en vertu de la PROPOSITION 2, isomorphe (et même strictement isomorphe) à une $\boldsymbol{B}$-visibilité canonique (puisque, $c$ étant un cône $\boldsymbol{B}$-projectif distingué de $\mathbf{P}$ et $\mu:\mathbf{P}\to\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ étant un modèle, $\mu(c)$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif limite de $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$).

**c**) Par composition d'isomorphies, on peut donc conclure. FIN DE LA PREUVE.

**3.2.g.** Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{P}$ est un prototype projectif localement $\mathbb{U}$-petit, on note :

$$\mathrm{Yonint}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) : \mathbf{P} \to \boldsymbol{\mathit{Mod}}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\mathit{Ens}}_{\mathbb{U}})^{op}$$

le modèle évidemment obtenu (en vertu de la PROPOSITION 6) lorsqu'on impose que :

- $\widehat{\underline{\mathrm{Yonint}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})}} = \underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})$ .

Ainsi :

$$\mathrm{Yonint}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) : \mathbf{P} \text{-}\!\!|\!\!\to \boldsymbol{\mathit{Mod}}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\mathit{Ens}}_{\mathbb{U}})$$

est un contre-modèle de $\mathbf{P}$ dans sa catégorie de modèles $\boldsymbol{\mathit{Mod}}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\mathit{Ens}}_{\mathbb{U}})$ : on l'appelle le *contre-modèle de Yoneda, intrinsèque à* $\mathbf{P}$ *(et* $\mathbb{U}$ *).*

## 3.3. Lemme de Yoneda pour les esquisses projectives.

**3.3.a.** Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, alors on sait que :

- le prototype projectif $\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})$ , *engendré par* $\mathbf{E}$ , est $\mathbb{U}$-petit (voir [Ref-II, 6.5.c.]) et donc, a fortiori, localement $\mathbb{U}$-petit,
- on dispose de la *représentation canonique* (voir [Ref-II, 6.5.c.]) :

$$\mathbf{E} \,|\, \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \to \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}) \,,$$

Par conséquent, on dispose du foncteur composé :

$$\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})$$

$$:$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{E}} \arrow[d, "\underline{\mathbf{E} \,|\, \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})}"] \\
\underline{\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})} \arrow[d, "\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}))"] \\
\boldsymbol{\mathit{Mod}}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}), \boldsymbol{\mathit{Ens}}_{\mathbb{U}})^{op}
\end{tikzcd}$$

$$\downarrow \boldsymbol{Mod}\left((\mathbf{E} \mid \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})),\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\right)^{op}$$

$$\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{op}$$

qu'on appelle le *foncteur de Yoneda relatif à* $\mathbf{E}$ *(et* $\mathbb{U}$ *).*

**3.3.b.** Etablissons que :

PROPOSITION 7 ("lemme de Yoneda relatif aux esquisses projectives"). *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers et si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse projective* $\mathbb{U}$ *-petite, naturellement en tout point* $E$ *de* $\mathbf{E}$ *et naturellement en tout modèle* $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *, on dispose d'une bijection canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(E),\mu\right) \xrightarrow{\cong} \mu(E) .$$

PREUVE. Le foncteur :

$$\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \mid \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}),\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}),\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

étant un isomorphisme (voir [Ref-III, 3.3.d.]), son inverse :

$$\mathrm{Inv}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}),\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

induit (par restriction), naturellement en tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et en tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ , une bijection :

$$\mathrm{bij}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E};E,\mu)$$

$$:$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(E),\mu\right)$$

$$\xrightarrow{\cong}$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left((\mathrm{Inv}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))\,(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(E)),(\mathrm{Inv}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))\,(\mu)\right)$$

$$=$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}))\,((\mathbf{E} \mid \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}))\,(E)),(\mathrm{Inv}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))\,(\mu)\right) .$$

Mais, d'après la PROPOSITION 4, naturellement en tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et en tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ , on dispose de la bijection :

$$\mathrm{homomelemint}\left((\mathbf{E} \mid \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}))\,(E),(\mathrm{Inv}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))\,(\mu)\right)$$

$$:$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\Big(\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}))\big((\mathbf{E}\,|\,\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}))(E)\big),(\mathrm{Inv}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))(\mu)\Big)$$

$$\xrightarrow{\cong}$$

$$\big((\mathrm{Inv}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}))(\mu)\big)\big((\mathbf{E}\,|\,\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}))(E)\big)$$

$$=$$

$$\mu(E)\,.$$

Par composition (de ces bijections successives), on voit donc que, naturellement en tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et en tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on dispose effetivement d'une bijection :

$$\mathrm{homomelem}(E,\mu)$$

$$:$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\big((\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(E)),\mu\big)$$

$$\xrightarrow{\cong}$$

$$\mu(E)\,,$$

(dont on notera :

$$\mathrm{elemhomom}(E,\mu)$$

$$:$$

$$\mu(E)$$

$$\xrightarrow{\cong}$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\big((\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(E)),\mu\big)$$

l'inverse). FIN DE LA PREUVE.

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{E} = \mathbf{P}$ est un prototype projectif $\mathbb{U}$-petit (qui est bien une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite particulière), la représentation canonique :

$$\mathbf{P}\,|\,\mathrm{ProtopG}(\mathbf{P}) : \mathbf{P} \to \mathrm{ProtopG}(\mathbf{P})$$

est évidemment (d'après [Ref-III, 3.3.d.]) un isomorphisme. Il induit donc (par restriction), naturellement en tous points $P$ et $P'$ de $\mathbf{P}$, une bijection canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{P}}}(P,P') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{ProtopG}(\mathbf{P})}}\big((\mathbf{P}\,|\,\mathrm{ProtopG}(\mathbf{P}))(P),(\mathbf{P}\,|\,\mathrm{ProtopG}(\mathbf{P}))(P')\big)\,.$$

Par conséquent, on dispose d'un isomorphisme naturel canonique du foncteur de Yoneda relatif à $\mathbf{P}$ (considéré comme une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite) vers le foncteur de Yoneda intrinsèque à $\mathbf{P}$ (vu comme un prototype projectif $\mathbb{U}$-petit, donc localement $\mathbb{U}$-petit) :

$$\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) \overset{\cong}{\Rightarrow} \underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) : \underline{\mathbf{P}} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{op} .$$

Remarquons enfin que, contrairement aux foncteurs de Yoneda intrinsèques (et donc, aussi, contrairement aux foncteurs de Yoneda relatifs) aux prototypes projectifs, les foncteurs de Yoneda relatifs aux esquisses projectives ne sont, en général, ni fidèles, ni pleins. Pour s'en convaincre, il suffit de supposer par exemple, que :

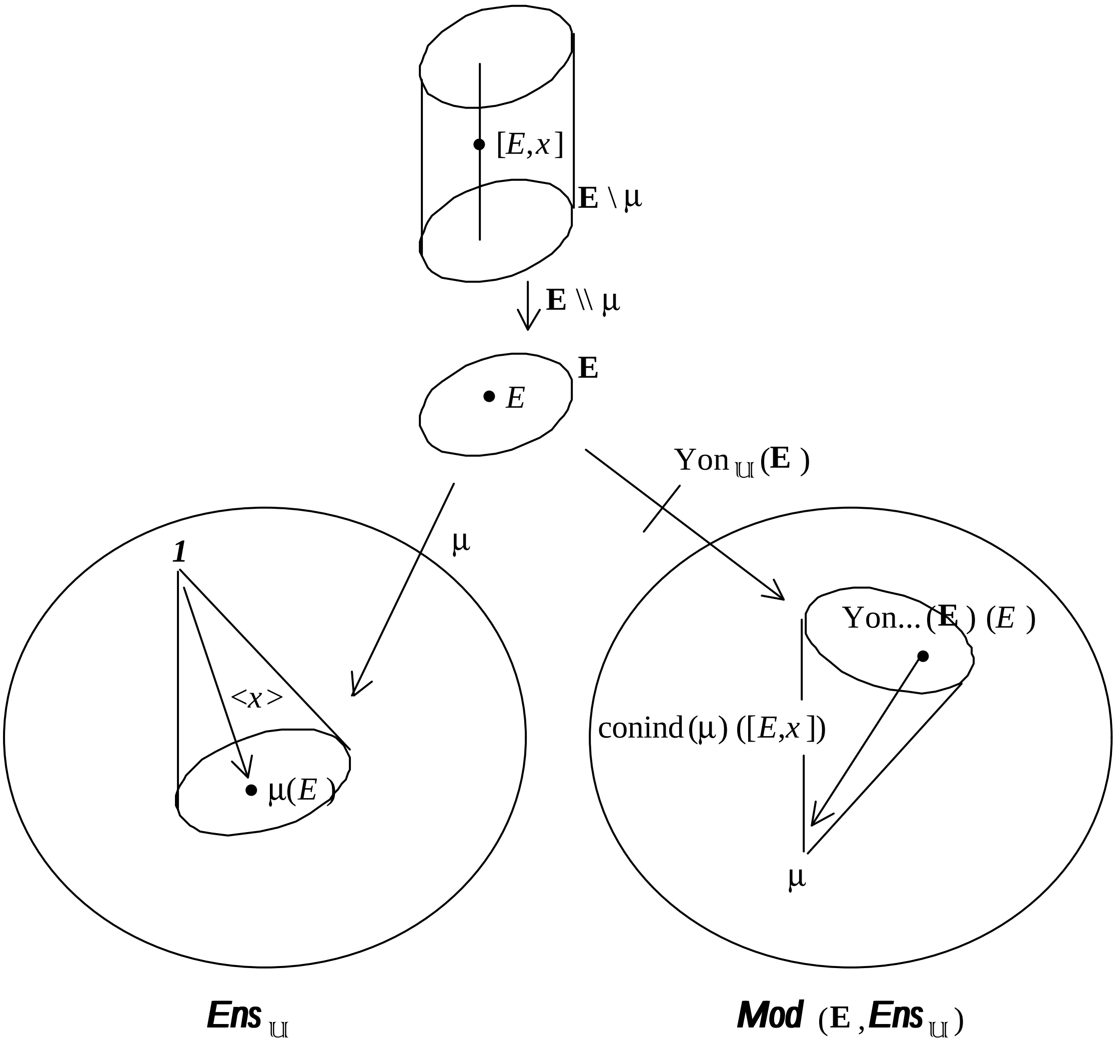
- $\mathbf{E}$ est l'esquisse projective ayant un seul point $E$, deux flèches identités distinctes $e_1, e_2 : E =\!\!\to E$, aucune autre flèche, aucun couple de flèches composable et aucun cône projectif distingué, alors on a nécessairement :

$$\underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(e_1) = \underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(e_2) = \mathrm{id}\big(\underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(E)\big) : \underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(E) =\!\!\to \underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(E) ,$$

et $\underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E}) : \underline{\mathbf{E}} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{op}$ n'est donc pas fidèle,

- $\mathbf{E}$ est l'esquisse projective n'ayant qu'un point $E$, aucune flèche et aucun cône projectif distingué, alors $\mathrm{id}\big(\underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(E)\big) : \underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(E) =\!\!\to \underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E})(E)$ n'est l'image d'aucune flèche $E \to E$ de $\mathbf{E}$ et $\underline{\mathrm{Yon}}(\mathbf{E}) : \underline{\mathbf{E}} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{op}$ n'est donc pas plein.

**3.3.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle (i.e. un point de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$), on désigne par $\mathrm{conind}(\mu)$ le *cône inductif relatif à* $\mu$ représenté dans le schéma ci-dessous (où, pour tout ensemble $X$ et tout élément $x \in X$, on désigne par $<x> : \boldsymbol{1} = \{\boldsymbol{0}\} \to X$ l'application telle que $<x>(\boldsymbol{0}) = x$) :




i.e. le cône inductif à valeurs dans $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- sa base-type est le graphe à composition $(\underline{\mathbf{E} \backslash \mu})^{op}$, dual du support de l'esquisse projective $\mathbf{E} \backslash \mu$ (éclatement de $\mathbf{E}$ par $\mu$),
- sa base est le foncteur composé :

$$(\underline{\mathbf{E} \backslash \mu})^{op} \xrightarrow{(\underline{\mathbf{E} \backslash\backslash \mu})^{op}} \underline{\mathbf{E}}^{op} \xrightarrow{(\underline{\mathrm{Yon}_{\mathbb{U}}}(\mathbf{E}))^{op}} \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

- son sommet est le point $\mu$ de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$,
- pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et pour tout élément $x$ de $\mu(\mathbf{E})$ (i.e. pour tout point $[E,x]$ de $\mathbf{E} \backslash \mu$), la flèche :

$$\text{elemhomom}(E,\mu)(x) : \underline{\text{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(E) \to \mu$$

est son induction relative à $[E,x]$.

Dans ces conditions, prouvons que :

PROPOSITION 8 ("densité du foncteur de Yoneda relatif aux esquisses projectives"). *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse projective* $\mathbb{U}$ *-petite et si* $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *en est un modèle, alors le cône inductif relatif à* $\mu$ *est un cône inductif limite de* $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$.

PREUVE. Il suffit de reprendre la PREUVE de la PROPOSITION 5, en y remplaçant purement et simplement "$\mathbf{P}$" par "$\mathbf{E}$", "conindint" par "conind", "$\underline{\text{Yonint}}$" par "$\underline{\text{Yon}}$" et "homomoelemint" par "homomelem".

Par dualité, il suffit donc de prouver que $(\text{conind}(\mu))^{\text{op}}$ est un cône projectif limite de $(\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))^{\text{op}}$. En vertu de la PROPOSITION 3, il suffit donc d'établir que, pour tout modèle $\mu' : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, la $(\underline{\mathbf{E}\backslash\mu})$-visibilité :

$$\text{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\text{conind}(\mu)^{+}(-), \mu'\right)$$

$$:$$

$$\text{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mu, \mu'\right)$$

$$<|$$

$$\text{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\text{conind}(\mu)(-), \mu')$$

est strictement isomorphe à la $(\underline{\mathbf{E}\backslash\mu})$-visibilité canonique :

$$\text{vispcan}\left(\text{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\text{conind}(\mu)(-), \mu'\right)\right)$$

$$:$$

$$\text{EnsPCan}\left(\text{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\text{conind}(\mu)(-), \mu'\right)\right)$$

$$<|$$

$$\text{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\text{conind}(\mu)(-), \mu'\right).$$

Pour ce faire, on procède comme suit :

**a)** Supposons que $h \in \text{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\mu, \mu'\right)$, i.e. que $h : \mu \to \mu'$ est une flèche de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))$.

Alors il est trivial de vérifier que la famille de composées :

$$\left(h \,.\, \text{conind}([E,x])\right)_{[E,x] \in \text{Pt}(\mathbf{E}\backslash\mu)}$$

est un élément de $\mathrm{EnsPCan}\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conind}(\mu)(\text{-}),\mu')\big)$.

On dispose donc de l'application :

$$j^{\times} : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mu,\mu') \to \mathrm{EnsPCan}\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conind}(\mu)(\text{-}),\mu')\big)$$

$$h \mapsto \big(h\,.\,\mathrm{conind}([E,x])\big)_{[E,x]\in \mathrm{Pt}(\mathbf{E}\backslash\mu)}\,.$$

**b)** Supposons que $k = \big(k_{[E,x]}\big)_{[E,x]\in \mathrm{Pt}(\mathbf{E}\backslash\mu)}$ est une famille appartenant à l'ensemble $\mathrm{EnsPCan}\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conind}(\mu)(\text{-}),\mu')\big)$.

Alors, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et pour tout élément $x \in \mu(E)$, à la flèche de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ :

$$k_{[E,x]} : \mathrm{conind}(\mu)([E,x]) \to \mu'$$

$$=$$

$$k_{[E,x]} : \underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(E) \to \mu'$$

correspond, en vertu de la PROPOSITION 7, un élément :

$$n_{k,E,x} = \big(\mathrm{homomelem}(E,\mu')\big)(k_{[E,x]}) \in \mu'(E)\,.$$

Ainsi, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$, on dispose de l'application :

$$n_{k,E} : \mu(E) \to \mu'(E)$$

$$x \mapsto n_{k,E,x}\,.$$

De la sorte, il est facile de vérifier qu'on définit une métamorphose naturelle :

$$n_k : \mu \Rightarrow \mu' : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

lorsqu'on stipule que :

- pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$, on a $n_k(E) = n_{k,E} : \mu(E) \to \mu'(E)$.

On dispose donc, maintenant, de l'application :

$$j'^{\times} : \mathrm{EnsPCan}\big(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{conind}(\mu)(\text{-}),\mu')\big) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mu,\mu')$$

$$k \mapsto n_k\,.$$

**c)** Il est trivial de constater que les applications $j^{\times}$ et $j'^{\times}$ sont inverses l'une de l'autre et, par conséquent, que $j^{\times}$ est une bijection qui définit l'isomorphie stricte recherchée. FIN DE LA PREUVE.

En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ est un prototype projectif $\mathbb{U}$-petit et si $\mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, le cône inductif $\mathrm{conindint}(\mu)$, intrinsèque à $\mu$, et le cône inductif $\mathrm{conind}(\mu)$, relatif à $\mu$, sont (d'après la PROPOSITION 5, pour le premier, et d'après la PROPOSITION 8, pour le second) deux cônes inductifs limites de

$\boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ ayant le point $\mu$ pour sommet commun, la catégorie $(\underline{\mathbf{P} \setminus \mu})^{op}$ pour base-type commune et de bases $(\underline{\mathbf{P} \setminus \mu})^{op} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ naturellement isomorphes.

**3.3.d.** Etablissons enfin que :

PROPOSITION 9. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse projective* $\mathbb{U}$ *-petite et si* $c$ *est un cône projectif distingué dans* $\mathbf{E}$, *alors le cône projectif image* $\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})\right)(c)$ *est un cône projectif limite de* $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{op}$.

PREUVE 1. Il suffit de reprendre la PREUVE de la PROPOSITION 6 en y remplaçant purement et simplement "$\mathbf{P}$" par "$\mathbf{E}$", "Yonint" par "Yon" et "PROPOSITION 4" par "PROPOSITION 7".

Ainsi, notons $\boldsymbol{B}$ le graphe à composition $\mathbb{U}$ -petit qui est base-type de $c$. En vertu de la PROPOSITION 3, il suffit d'établir que, pour tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, la $\boldsymbol{B}$ -visibilité :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(c^{\times}(\text{-})), \mu\right)$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(c^{\times}), \mu\right)$$
$$<|$$
$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P})(c(\text{-})), \mu\right)$$

est isomorphe à une $\boldsymbol{B}$ -visibilité canonique.

Pour ce faire, on procède comme suit :

**a)** La $\boldsymbol{B}$ -visibilité $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})(c^{\times}(\text{-})), \mu\right)$ est, en vertu de la PROPOSITION 7, évidemment isomorphe à la $\boldsymbol{B}$ -visibilité :

$$\mu(c^{\times}(\text{-}))$$
$$\vdots$$
$$\mu(c^{\times})$$
$$<|$$
$$\mu(c(\text{-}))$$

qui s'identifie au cône $\boldsymbol{B}$ -projectif $\mu(c)$, image de $c$ par $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$.

**b)** La $\boldsymbol{B}$-visibilité $\mu(c^{\times}(\text{-}))$ est, en vertu de la PROPOSITION 2, isomorphe (et même strictement isomorphe) à une $\boldsymbol{B}$-visibilité canonique (puisque, $c$ étant un cône $\boldsymbol{B}$-projectif distingué de $\mathbf{E}$ et $\mu : \mathbf{P} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ étant un modèle, $\mu(c)$ est un cône $\boldsymbol{B}$-projectif limite de $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$).

**c**) Par composition d'isomorphies, on peut donc conclure. FIN DE LA PREUVE 1.

PREUVE 2. Par définition, le foncteur $\underline{\mathrm{Yon}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}) : \mathbf{E}} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$ est composé des foncteurs :

- $\underline{\mathbf{E} \mid \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})} : \underline{\mathbf{E}} \to \underline{\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})}$, qui transforme tout cône projectif distingué de $\mathbf{E}$ en un cône projectif distingué de $\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})$ (puisqu'il est le support d'une réalisation),
- $\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})) : \underline{\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})} \to \boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$, qui transforme tout cône projectif distingué de $\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E})$ en un cône limite projective de $\boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$ (d'après la PROPOSITION 6),
- $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \mid \mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}} : \boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$ qui transforme tout cône projectif limite de $\boldsymbol{Mod}(\mathrm{ProtopG}(\mathbf{E}), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$ en un cône projectif limite de $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$ (puisque c'est un isomorphisme, d'après [Ref-III, 3.3.d.]).

On conclut donc immédiatement. FIN DE LA PREUVE 2.

**3.3.e.** Si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, on note :

$$\mathrm{Yon}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}}$$

le modèle évidemment obtenu (en vertu de la PROPOSITION 9) lorsqu'on impose que :

- ${}_{\wedge}\underline{\mathrm{Yon}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})} = \underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E})$.

Ainsi :

$$\mathrm{Yon}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \text{ -|}\!\to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

est un contre-modèle de $\mathbf{E}$ dans sa catégorie de modèles $\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$ : on l'appelle le *contre-modèle de Yoneda relatif à* $\mathbf{E}$ *(et* $\mathbb{U}$*).*

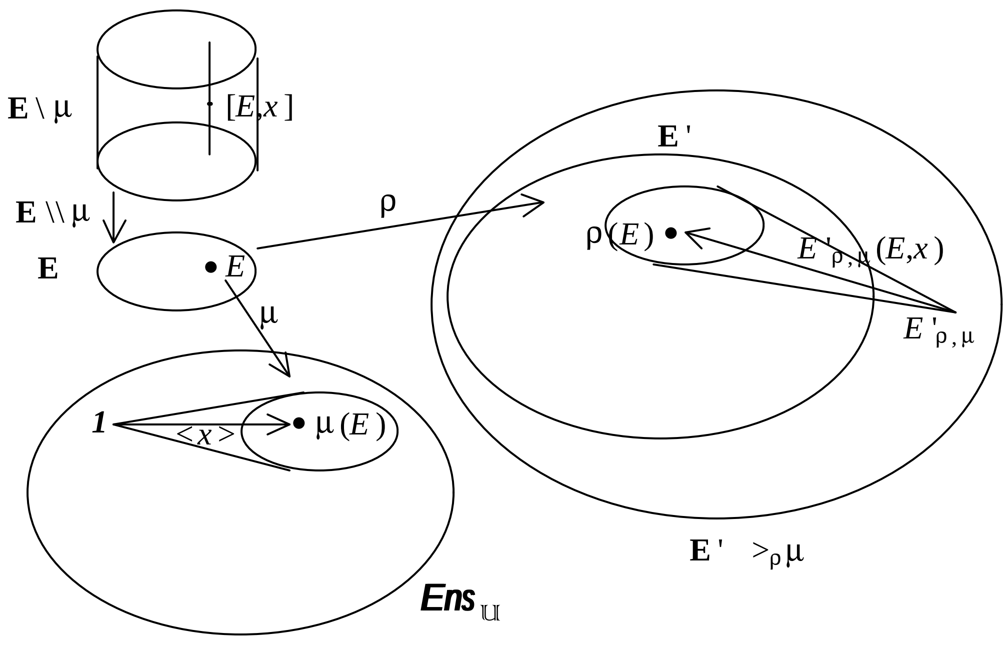
En particulier, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ est un prototype projectif $\mathbb{U}$-petit, on dispose évidemment d'un contre-isomorphisme canonique du contre-modèle de Yoneda intrinsèque à $\mathbf{P}$ (vu comme un prototype projectif $\mathbb{U}$-petit, donc localement $\mathbb{U}$-petit) vers le contre-modèle de Yoneda relatif à **P** (considéré comme une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite) :

$$\underline{\mathrm{Yonint}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) \overset{\cong}{=\!\!\!|\!\!=\!\!>} \underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{P}) : \underline{\mathbf{P}} \longrightarrow\!\!\!\!|\;\; \boldsymbol{Mod}(\mathbf{P}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}} .$$

# 4. Modèles engendrés et homomorphismes engendrés.

## 4.1. Modèle engendré par un modèle le long d'une représentation.

**4.1.a.** Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives, si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une représentation, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, on note $\mathbf{E}' >_{\rho} \mu$ l'esquisse projective représentée dans le schéma ci-dessous :




i.e. la plus petite esquisse projective évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\mathbf{E}' >_{\rho} \mu$ contient $\mathbf{E}'$, de sorte qu'on dispose de la représentation injection canonique :

$$\mathbf{E}' \subseteq (\mathbf{E}' >_{\rho} \mu) : \mathbf{E}' \to (\mathbf{E}' >_{\rho} \mu)$$

- $\mathbf{E}' \ >_\rho \mu$ contient un point supplémentaire (i.e. supposé ne pas appartenir à $\mathbf{E}'$), noté $E'_{\rho\,,\,\mu}$,
- $\mathbf{E}' \ >_\rho \mu$ contient, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et pour tout $x \in \mu(E)$, une flèche supplémentaire, notée $e'_{\rho\,,\,\mu}(E, x) : E'_{\rho\,,\,\mu} \to \rho(E)$,
- $\mathbf{E}' \ >_\rho \mu$ contient, pour tous points $E_1$ et $E_2$ de $\mathbf{E}$, toute flèche $e : E_1 \to E_2$ de $\mathbf{E}$ et tout $x \in \mu(E_1)$, le couple composable supplémentaire $\left(e'_{\rho\,,\,\mu}(E_1, x), \rho(e)\right)$ et on a :

$$\rho(e) \bullet e'_{\rho\,,\,\mu}(E_1, x) = e'_{\rho\,,\,\mu}\left(E_2, \mu(e)(x)\right),$$

- $\mathbf{E}' \ >_\rho \mu$ contient le cône projectif distingué supplémentaire, noté $c'_{\rho\,,\,\mu}$, évidemment bien défini lorsqu'on stipule que :
  - sa base-type est le graphe à composition $\underline{\mathbf{E} \backslash \mu}$ (support de l'esquisse projective $\mathbf{E} \backslash \mu$, éclatement de $\mathbf{E}$ par $\mu$),
  - sa base est le foncteur composé :

$$\underline{\mathbf{E} \backslash \mu} \xrightarrow{\underline{\mathbf{E} \backslash\backslash \mu}} \underline{\mathbf{E}} \xrightarrow{\underline{\rho}} \underline{\mathbf{E}'} \xrightarrow{\subseteq} \underline{\mathbf{E}' \ >_\rho \mu},$$

  (de sorte que, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et tout $x \in \mu(E)$ - i.e. pour tout point $[E, x]$ de $\underline{\mathbf{E} \backslash \mu}$ - on a :

$$c'_{\rho\,,\,\mu}([E, x]) = \rho(E)),$$

  - son sommet est le point $c'^{\times}_{\rho\,,\,\mu} = E'_{\rho\,,\,\mu}$,
  - pour tout point $[E, x]$ de $\underline{\mathbf{E} \backslash \mu}$ (i.e. pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et tout $x \in \mu(E)$) sa projection relative à $[E, x]$ est :

$$c'^{\times}_{\rho\,,\,\mu}([E, x]) = e'_{\rho\,,\,\mu}(E, x).$$

En particulier, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont $\mathbb{U}$-petites, il est clair que $\mathbf{E}' \ >_\rho \mu$ est aussi $\mathbb{U}$-petite.

**4.1.b.** Il est facile de vérifier que :

PROPOSITION 10. *Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, si $\mathbf{E}'$ est une esquisse projective, si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une représentation et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, alors le foncteur :*

$$\boldsymbol{Mod}\left((\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' \ >_\rho \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\right) : \boldsymbol{Mod}\left((\mathbf{E}' \ >_\rho \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\right) \to \boldsymbol{Mod}\left(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\right)$$

*est une équivalence de catégories.*

PREUVE. Naturellement en tout modèle $\mu' : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on dispose du modèle :

$$\mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu'):\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu')$ prolonge $\mu'$,
- $\mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu')(c'_{\rho,\mu})$ est le cône projectif limite de $\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ s'identifiant à la visibilité canonique $\mathrm{vispcan}(f'_{\rho,\mu,\mu'})$, si on désigne par $f'_{\rho,\mu,\mu'}$ la fonctionnalité qui s'identifie au foncteur :

$$\underline{\mathbf{E}\backslash\mu} \xrightarrow{\mathbf{E}\backslash\backslash\mu} \underline{\mathbf{E}} \xrightarrow{\rho} \underline{\mathbf{E}'} \xrightarrow{\wedge\mu'} \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\,.$$

On conclut alors immédiatement, puisqu'un (quelconque) modèle $\mu'':\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ qui prolonge (canoniquement ou non) le modèle $\mu':\mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est évidemment (d'après la PROPOSITION 2) naturellement isomorphe à $\mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu')$. FIN DE LA PREUVE.

**4.1.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives $\mathbb{U}$-petites, si $\rho:\mathbf{E}\to\mathbf{E}'$ est une représentation et si $\mu:\mathbf{E}\to\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, alors :

- l'esquisse projective $\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu$ étant $\mathbb{U}$-petite, on dispose du foncteur de Yoneda relatif à $\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu$ :

$$\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu):\underline{\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu} \to \boldsymbol{Mod}\left((\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu),\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\right)^{\mathrm{op}},$$

- par conséquent, on dispose du modèle :

$$\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu)\right)(E'_\mu):\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\,,$$

(valeur de $\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu)$ en le point $E'_{\rho,\mu}$, sommet du cône projectif distingué $c'_{\rho,\mu}$ ajouté à $\mathbf{E}'$ pour obtenir $\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu$),

- donc, par restriction à $\mathbf{E}'$ (i.e. par l'équivalence :

$$\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}'\subseteq\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}):\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})\to\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}',\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

ou, encore, par composition avec l'injection canonique :

$$\mathbf{E}'\subseteq\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu:\mathbf{E}'\to\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu\,),$$

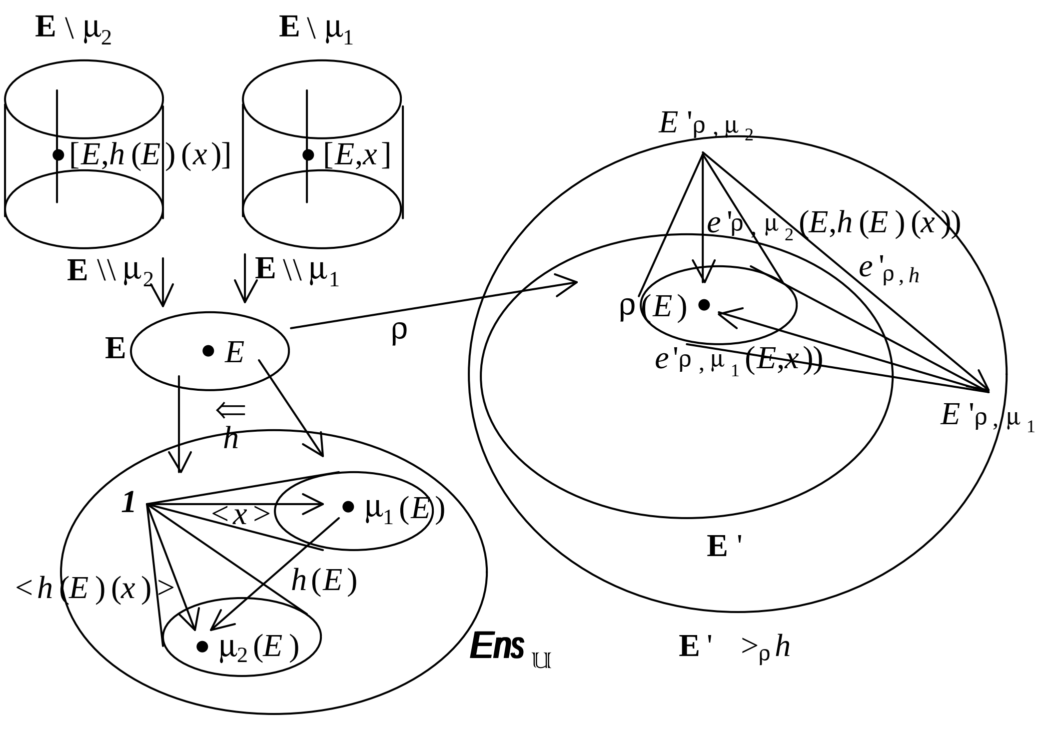
on dispose du modèle :

$$\mathrm{eng}_\rho(\mu)=\left[\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu)\right)(E'_{\rho,\mu})\right]\circ\left[\mathbf{E}'\subseteq\mathbf{E}' \;\; >_\rho \mu\right]:\mathbf{E}'\to\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\,.$$

On appelle $\mathrm{eng}_\rho(\mu):\mathbf{E}'\to\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *le modèle (de* $\mathbf{E}'$*) engendré le long (de la représentation)* $\rho:\mathbf{E}\to\mathbf{E}'$ *par le modèle* $\mu:\mathbf{E}\to\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *(de* $\mathbf{E}$*).*

### 4.2. Homomorphisme engendré par un homomorphisme le long d'une représentation.

**4.2.a.** Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives, si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une représentation, si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mu_1, \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ sont deux modèles et si $h : \mu_1 \Rightarrow \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un homomorphisme, on note $\mathbf{E}' >_\rho h$ l'esquisse projective représentée dans le schéma ci-dessous :




i.e. la plus petite esquisse projective évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\mathbf{E}' >_\rho h$ contient $\mathbf{E}' >_\rho \mu_1$ et $\mathbf{E}' >_\rho \mu_2$, de sorte qu'on dispose du diagramme commutatif de représentations injections canoniques ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{E}' >_\rho \mu_1 \arrow[dr, "\mathbf{E}' >_\rho \mu_1 \subseteq \mathbf{E}' >_\rho h"] & \\
\mathbf{E}' \arrow[ur, "\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_\rho \mu_1"] \arrow[rr, "\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_\rho h"] \arrow[dr, "\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_\rho \mu_2"'] & & \mathbf{E}' >_\rho h \\
 & \mathbf{E}' >_\rho \mu_2 \arrow[ur, "\mathbf{E}' >_\rho \mu_2 \subseteq \mathbf{E}' >_\rho h"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $\mathbf{E}' >_\rho h$ contient une flèche supplémentaire (i.e. supposée n'appartenir ni à $\mathbf{E}' >_\rho \mu_1$ ni à $\mathbf{E}' >_\rho \mu_2$ ), notée $e'_{\rho\,,\,h} : E'_{\rho\,,\,\mu\,2} \to E'_{\rho\,,\,\mu\,1}$ ,

- $\mathbf{E}' >_\rho h$ contient, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et pour tout $x \in \mu_1(E)$, le couple composable supplémentaire $\left(e'_{\rho\,,\,h}\,, e'_{\rho\,,\,\mu\,1}(E\,, x)\right)$ et on a :

$$e'_{\rho\,,\,\mu\,1}(E\,, x) \bullet e'_{\rho\,,\,h} = e'_{\rho\,,\,\mu\,2}\left(E\,, h(E)(x)\right).$$

En particulier, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont $\mathbb{U}$ -petites, il est clair que $\mathbf{E}' >_\rho h$ est aussi $\mathbb{U}$ -petite.

**4.2.b.** On voit immédiatement que :

PROPOSITION 11. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\mathbf{E}$ *est une esquisse projective* $\mathbb{U}$ *-petite, si* $\mathbf{E}'$ *est une esquisse projective, si* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *est une représentation, si* $\mu_1\,, \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *sont deux modèles et si* $h : \mu_1 \Rightarrow \mu_2$ *est un homomorphisme, alors le diagramme(évidemment commutatif) de foncteurs ci-dessous :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho \mu_1, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \arrow[dl, "\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \subseteq (\mathbf{E}' >_\rho \mu_1), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"'] & \\
\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) & & \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho h, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \arrow[ul, "\boldsymbol{Mod}((\mathbf{E}' >_\rho \mu_1) \subseteq (\mathbf{E}' >_\rho h), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"'] \arrow[ll, "\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \subseteq (\mathbf{E}' >_\rho h), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"'] \arrow[dl, "\boldsymbol{Mod}((\mathbf{E}' >_\rho \mu_2) \subseteq (\mathbf{E}' >_\rho h), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"] \\
& \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho \mu_2, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \arrow[ul, "\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \subseteq (\mathbf{E}' >_\rho \mu_2), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"] &
\end{tikzcd}$$

*est constitué d'équivalences de catégories.*

PREUVE. Naturellement en tout modèle $\mu' : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on dispose du modèle :

$$\mathrm{prol}_{\rho\,,\,h}(\mu') : \mathbf{E}' >_\rho h \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathrm{prol}_{\rho\,,\,h}(\mu')$ prolonge $\mathrm{prol}_{\rho\,,\,\mu_1}(\mu')'$,
- $\mathrm{prol}_{\rho\,,\,h}(\mu')$ prolonge $\mathrm{prol}_{\rho\,,\,\mu_2}(\mu')'$,
- $\mathrm{prol}_{\rho\,,\,h}(\mu')(e'_{\rho\,,\,h})$ est l'unique application possible (factorisant un cône projectif au travers d'un cône projectif limite de même base).

On conclut alors, comme dans la PREUVE de la PROPOSITION 10. FIN DE LA PREUVE.

**4.2.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives $\mathbb{U}$-petites, si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une représentation, si $\mu_1, \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ sont deux modèles et si $h : \mu_1 \Rightarrow \mu_2$ est un homomorphisme, alors :

- l'esquisse projective $\mathbf{E}' >_\rho h$ étant $\mathbb{U}$-petite, on dispose du foncteur de Yoneda relatif à $\mathbf{E}' >_\rho h$ :

$$\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho h) : \underline{\mathbf{E}' >_\rho h} \to \boldsymbol{Mod}((\mathbf{E}' >_\rho h), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})^{\mathrm{op}},$$

- par conséquent, on dispose de l'homomorphisme :

$$\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho h)\right)(e'_{\rho,h}) : \left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho h)\right)(E'_{\rho,\mu_1}) \Rightarrow \left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho h)\right)(E'_{\rho,\mu_2})$$

(valeur de $\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho h)$ en la flèche $e'_{\rho,h} : E'_{\rho,\mu_2} \to E'_{\rho,\mu_1}$, ajoutée à $\mathbf{E}'$ pour obtenir $\mathbf{E}' >_\rho h$ ),

- donc, par restriction à $\mathbf{E}'$ (i.e. par l'équivalence :

$$\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_\rho h, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho h, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

ou, encore, par composition avec l'injection canonique :

$$\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_\rho h : \mathbf{E}' \to \mathbf{E}' >_\rho \mu \text{ ),}$$

on dispose de l'homomorphisme :

$$\mathrm{eng}_\rho(h)$$

$$=$$

$$\left[\left(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho h)\right)(E'_{\rho,\mu})\right] \circ \left[\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_\rho \mu\right]$$

$$:$$

$$\mathrm{eng}_\rho(\mu_1) \Rightarrow \mathrm{eng}_\rho(\mu_2)$$

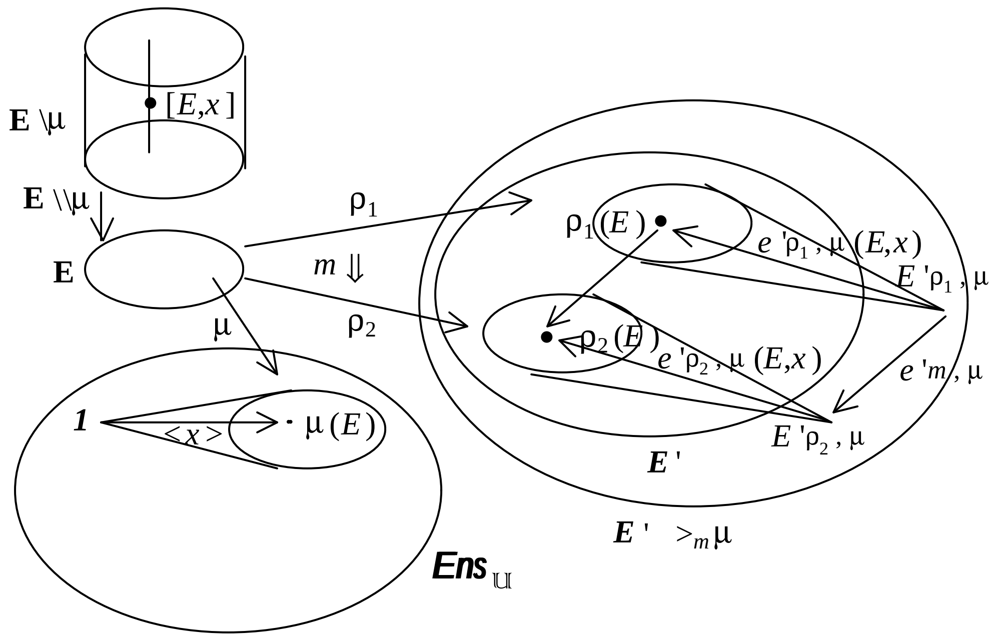
$$:$$

$$\mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} .$$

On appelle $\mathrm{eng}_\rho(h) : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *l'homomorphisme (entre modèles de* $\mathbf{E}'$*) engendré le long de (la représentation)* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *par l'homomorphisme* $h : \mu_1 \Rightarrow \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *(entre modèles de* $\mathbf{E}$ *).*

## 4.3. Homomorphisme engendré par un modèle le long d'une métamorphose naturelle.

**4.3.a.** Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations, si $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle, si $\mathbb{U}$ est un univers et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, on note $\mathbf{E}' |>_m \mu$ l'esquisse projective représentée dans le schéma ci-dessous :




i.e. la plus petite esquisse projective évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\mathbf{E}' >_m \mu$ contient $\mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu$ et $\mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu$, de sorte qu'on dispose du diagramme commutatif de représentations injections canoniques ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu \arrow[dr, "\mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu \subseteq \mathbf{E}' >_m \mu"] & \\
\mathbf{E}' \arrow[ur, "\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu"] \arrow[rr, "\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_m \mu"] \arrow[dr, "\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu"'] & & \mathbf{E}' >_m \mu \\
& \mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu \arrow[ur, "\mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu \subseteq \mathbf{E}' >_m \mu"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $\mathbf{E}' >_m \mu$ contient, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et pour tout $x \in \mu(E)$, une flèche supplémentaire, notée $e'_{m,\mu}(E,x) : E'_{\rho_1,\mu} \to \rho_2(E)$,
- $\mathbf{E}' >_m \mu$ contient une flèche supplémentaire (i.e. supposée n'appartenir ni à $\mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu$ ni à $\mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu$), notée $e'_{m,\mu} : E'_{\rho_1,\mu} \to E'_{\rho_2,\mu}$,
- $\mathbf{E}' >_m h$ contient, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et pour tout $x \in \mu(E)$, les couples composable supplémentaires $\left(e'_{\rho_1,\mu}(E,x), m(E)\right)$ et $\left(e'_{m,\mu}, e'_{\rho_2,\mu}(E,x)\right)$ et on a :

$$m(E)\bullet e'_{\rho_1,\mu}(E,x) = e'_{m,\mu}(E,x) = e'_{\rho_2,\mu}(E,x)\bullet e'_{m,\mu}, e'_{\rho_2}.$$

En particulier, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont $\mathbb{U}$-petites, il est clair que $\mathbf{E}' >_m \mu$ est aussi $\mathbb{U}$-petite.

**4.3.b.** On voit immédiatement que :

PROPOSITION 12. *Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ est une esquisse projective $\mathbb{U}$-petite, si $\mathbf{E}'$ est une esquisse projective, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations, si $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une métamorphose naturelle et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, alors le diagramme (évidemment commutatif) de foncteurs ci-dessous :*

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \arrow[dl, "\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \subseteq (\mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"'] & \\
\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) & & \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_m \mu, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \arrow[ll, "\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \subseteq (\mathbf{E}' >_m \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"'] \arrow[ul, "\boldsymbol{Mod}((\mathbf{E}' >_{\rho_1} \mu) \subseteq (\mathbf{E}' >_m \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"'] \arrow[dl, "\boldsymbol{Mod}((\mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu) \subseteq (\mathbf{E}' >_m \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"] \\
 & \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \arrow[ul, "\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E} \subseteq (\mathbf{E}' >_{\rho_2} \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})"] &
\end{tikzcd}$$

*est constitué d'équivalences de catégories.*

PREUVE. Naturellement en tout modèle $\mu' : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on dispose du modèle :

$$\mathrm{prol}_{m,\mu}(\mu') : \mathbf{E}' >_m \mu \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$$

évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- $\mathrm{prol}_{m,\mu}(\mu')$ prolonge $\mathrm{prol}_{\rho_1,\mu}(\mu')$,
- $\mathrm{prol}_{m,\mu}(\mu')$ prolonge $\mathrm{prol}_{\rho_2,\mu}(\mu')$,
- $\mathrm{prol}_{m,\mu}(\mu')(e'_{m,\mu}(E,x))$ est, pour tout point $E$ de $\mathbf{E}$ et pour tout $x \in \mu(E)$, l'unique application possible (composée d'applications données),
- $\mathrm{prol}_{m,\mu}(\mu')(e'_{m,\mu})$ est l'unique application possible (factorisant un cône projectif au travers d'un cône projectif limite de même base).

On conclut alors, comme dans la PREUVE de la PROPOSITION 10. FIN DE LA PREUVE.

**4.3.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives $\mathbb{U}$-petites, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations, si $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle et si $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, alors :

- l'esquisse projective $\mathbf{E}' >_m \mu$ étant $\mathbb{U}$-petite, on dispose du foncteur de Yoneda relatif à $\mathbf{E}' >_m \mu$ :

$$\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_m \mu) : \underline{\mathbf{E}' >_m \mu} \to \boldsymbol{Mod}\big((\mathbf{E}' >_m \mu), \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}\big)^{\mathrm{op}},$$

- par conséquent, on dispose de l'homomorphisme :

$$\big(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_m \mu)\big)(e'_{m,\mu}) : \big(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_m \mu)\big)(E'_{\rho_2,\mu}) \Rightarrow \big(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_m \mu)\big)(E'_{\rho_1,\mu})$$

  (valeur de $\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_m \mu)$ en la flèche $e'_{m,\mu} : E'_{\rho_1,\mu} \to E'_{\rho_2,\mu}$, ajoutée à $\mathbf{E}'$ pour obtenir $\mathbf{E}' >_m \mu$),

- donc, par restriction à $\mathbf{E}'$ (i.e. par l'équivalence :

$$\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_m \mu, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_m \mu, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

  ou, encore, par composition avec l'injection canonique :

$$\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_m \mu : \mathbf{E}' \to \mathbf{E}' >_m \mu),$$

  on dispose de l'homomorphisme :

$$\mathrm{eng}_m(\mu)$$
$$=$$
$$\big[\big(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_m \mu)\big)(e'_{m,\mu})\big] \circ [\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}' >_m \mu]$$
$$:$$
$$\mathrm{eng}_{\rho_2}(\mu) \Rightarrow \mathrm{eng}_{\rho_1}(\mu)$$
$$:$$
$$\mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}.$$

On appelle $\mathrm{eng}_m(\mu) : \mathrm{eng}_{\rho_2}(\mu) \Rightarrow \mathrm{eng}_{\rho_1}(\mu) : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *l'homomorphisme (entre modèles de* $\mathbf{E}'$*) engendré le long de (la métamorphose naturelle)* $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *par le modèle* $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *(de* $\mathbf{E}$*).*

## 4.4. Adjonctions.

**4.4.a.** Prouvons que :

PROPOSITION 13. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers et si* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *sont deux esquisses projectives* $\mathbb{U}$*-petites, alors, naturellement en toute représentation* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, *naturellement en tout modèle* $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *et naturellement en tout modèle* $\mu' : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ *, on dispose d'une bijection canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{eng}_\rho(\mu), \mu') \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mu, \boldsymbol{Mod}(\rho, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})(\mu')) .$$

PREUVE. **a)** Si $\nu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un modèle, désignons par $f_{\mu,\nu}$ la fonctionnalité qui s'identifie au foncteur :

$$\underline{\mathbf{E} \setminus \mu} \xrightarrow{\mathbf{E} \setminus\setminus \mu} \underline{\mathbf{E}} \xrightarrow{\hat{\nu}} \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} .$$

Alors, si $h : \mu \Rightarrow \nu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ est un homomorphisme, il est clair que la famille $\big(h(E)(x)\big)_{[E,x] \in \mathrm{Pt}(\underline{\mathbf{E} \setminus \mu})}$ est un élément de $\mathrm{EnspCan}(f_{\mu,\nu})$ .

Ainsi, naturellement en tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ et naturellement en tout modèle $\nu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ , on dispose de l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mu, \nu) & \to & \mathrm{EnspCan}(f_{\mu,\nu}) \\ h & \mapsto & \big(h(E)(x)\big)_{[E,x] \in \mathrm{Pt}(\underline{\mathbf{E} \setminus \mu})} \end{array}$$

et il est facile de vérifier que c'est une bijection.

**b)** Naturellement en toute représentation $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, naturellement en tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ et naturellement en tout modèle $\mu' : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on voit maintenant que :

- on dispose (en vertu de la PROPOSITION 10 et par construction de $\mathrm{eng}_\rho(\mu)$ ) d'une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mathrm{eng}_\rho(\mu), \mu')$$

$$\cong$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho \mu, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\Big( \big(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho \mu)\big)(E'_\mu), \mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu') \Big) ,$$

- on dispose (en vertu de la PROPOSITION 7) d'une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}' >_\rho \mu,\, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\Big( \big(\underline{\mathrm{Yon}}_{\mathbb{U}}(\mathbf{E}' >_\rho \mu)\big)(E'_\mu),\ \mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu') \Big)$$

$$\cong$$

$$\big(\mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu')\big)(E'_\mu),$$

- on a (par construction, suivant la PREUVE de la PROPOSITION 10) :

$$\big(\mathrm{prol}_{\rho,\mu}(\mu')\big)(E'_\mu)$$

$$=$$

$$\mathrm{EnspCan}(f'_{\mu,\mu'}),$$

- on dispose (en vertu du **a)** précédent et puisqu'évidemment $f'_{\mu,\mu'} = f_{\mu,\mu' \circ \rho}$) d'une bijection :

$$\mathrm{EnspCan}(f'_{\mu,\mu'})$$

$$=$$

$$\mathrm{EnspCan}(f_{\mu,\mu' \circ \rho})$$

$$\cong$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}(\mu, \mu' \circ \rho)$$

$$=$$

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})}\big(\mu, \boldsymbol{Mod}(\rho, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})(\mu')\big).$$

FIN DE LA PREUVE.

**4.4.b.** Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}'$ sont deux catégories et si $\Phi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ et $\Phi' : \boldsymbol{A}' \to \boldsymbol{A}$ sont deux foncteurs, on dit que $\Phi$ est un *adjoint à gauche de* $\Phi'$ si :

- naturellement en tout point $A$ de $\boldsymbol{A}$ et naturellement en tout point $A'$ de $\boldsymbol{A}'$, on dispose d'une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}'}(\Phi(A), A') \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, \Phi'(A')).$$

**4.4.c.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives $\mathbb{U}$-petites et si $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est une représentation, on note (indifféremment) :

$$\mathrm{eng}_\rho(-) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

$$=$$

$$\boldsymbol{Mod}_{\#}(\rho, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

le foncteur *modèle engendré le long de* $\rho$, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on a :

$$(\boldsymbol{Mod}_{\#}(\rho, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))(\mu) = \mathrm{eng}_\rho(\mu) : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} ,$$

- pour tous modèles $\mu_1, \mu_2 : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$ et tout homomorphisme $h : \mu_1 \Rightarrow \mu_2$, on a :

$$(\boldsymbol{Mod}_{\#}(\rho, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))(h) = \mathrm{eng}_\rho(h) : \mathrm{eng}_\rho(\mu_1) \Rightarrow \mathrm{eng}_\rho(\mu_2) : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} .$$

De la PROPOSITION 13, on déduit immédiatement que :

PROPOSITION 14 ("théorème du modèle engendré"). *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *sont deux esquisses projectives* $\mathbb{U}$*-petites et si* $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *est une représentation, alors le foncteur "modèle engendré le long de* $\rho$ *" :*

$$\boldsymbol{Mod}_{\#}(\rho, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

*est un adjoint à gauche du foncteur "composition avec* $\rho$ *à droite" :*

$$\boldsymbol{Mod}(\rho, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) .$$

**4.4.d.** Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}'$ sont deux catégories, si $\Phi_1, \Phi_2 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ et $\Phi'_1, \Phi'_2 : \boldsymbol{A}' \to \boldsymbol{A}$ sont quatre foncteurs, si $t : \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1$ et $t' : \Phi'_1 \Rightarrow \Phi'_2$ sont deux transformations naturelles, on dit que $t$ est une *adjointe à gauche de* $t'$ si :

- naturellement en tout point $A$ de $\boldsymbol{A}$ et naturellement en tout point $A'$ de $\boldsymbol{A}'$, on dispose d'un diagramme commutatif (d'applications et bijections) tel que ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}'}(\Phi_1(A),A') \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}'}(t(A),A')"'] & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\Phi'_1(A')) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,t'(A'))"] \\
\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}'}(\Phi_2(A),A') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A,\Phi'_2(A'))
\end{tikzcd}$$

**4.4.e.** Si $\mathbb{U}$ est un univers, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ sont deux esquisses projectives $\mathbb{U}$-petites, si $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ sont deux représentations et si $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ est une métamorphose naturelle, on note (indifféremment) :

$$\mathrm{eng}_m(-) : \mathrm{eng}_{\rho_2}(-) \Rightarrow \mathrm{eng}_{\rho_1}(-)$$

$$=$$

$$\boldsymbol{Mod}_\#(m, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}_\#(\rho_2, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \Rightarrow \boldsymbol{Mod}_\#(\rho_1, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

la transformation naturelle *homomorphisme engendré le long de* $m$, i.e. la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout modèle $\mu : \mathbf{E} \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}$, on a :

$$(\boldsymbol{Mod}_\#(m, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))(\mu) = \mathrm{eng}_m(\mu) : \mathrm{eng}_{\rho_2}(\mu) \Rightarrow \mathrm{eng}_{\rho_1}(\mu) : \mathbf{E}' \to \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}} .$$

De la PROPOSITION 13 (et de la PROPOSITION 14) résulte immédiatement que :

PROPOSITION 15. *Si* $\mathbb{U}$ *est un univers, si* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *sont deux esquisses projectives* $\mathbb{U}$*-petites, si* $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ *sont deux représentations et si* $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$ *est une métamorphose naturelle, alors la transformation naturelle "homomorphisme engendré le long de* $m$ *" :*

$$\boldsymbol{Mod}_\#(m, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

$$:$$

$$\boldsymbol{Mod}_\#(\rho_2, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \Rightarrow \boldsymbol{Mod}_\#(\rho_1, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

$$:$$

$$\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

*est une adjointe à gauche de la transformation naturelle "composition avec m à droite" :*

$$\boldsymbol{Mod}\,(m, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

$$:$$

$$\boldsymbol{Mod}\,(\rho_1, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \Rightarrow \boldsymbol{Mod}\,(\rho_2, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})$$

$$:$$

$$\boldsymbol{Mod}\,(\mathbf{E}', \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}\,(\mathbf{E}, \boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})\,.$$

**4.4.f.** Si $\mathbb{U}'$ est un univers, on note :

$$\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'} : \mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'} \to \mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$$

le morphisme tensoriel de *dualisation*, i.e. le $\boldsymbol{1}$-morphisme tensoriel catégorique (inversible) évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- le foncteur :

$$(\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\text{-}) : (\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})} \to (\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}$$

$$=$$

$$(\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\text{-}) : \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'} \to \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'}$$

  est le foncteur *dualisation*, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

  - pour tout graphe à composition $\mathbb{U}'$-petit $\boldsymbol{G}$, on a :

$$(\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}^{\mathrm{op}}\,,$$

  - pour tous graphes à composition $\mathbb{U}'$-petits $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ et tout foncteur $\phi : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$, on a :

$$(\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\phi) = \phi^{\mathrm{op}} : \boldsymbol{G}^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{G}'^{\,\mathrm{op}}\,,$$

- la transformation naturelle (de réécriture tensorielle) :

$$\mathrm{tens}_{\,\mathrm{id}\,(\mathit{0}),\,\mathrm{id}\,(\mathit{0})}$$

$$:$$

$$(\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\text{-}) \_\, (\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\text{-}) \Rightarrow (\boldsymbol{W}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}\,(\mathit{0})}(\text{-} \,\_\, \text{-})$$

$$:$$

$$\boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'} \times \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'} \to \boldsymbol{Comp}_{\mathbb{U}'}$$

est l'équivalence naturelle évidemment obtenue lorsqu'on stipule que :

- pour tous graphes à composition $\mathbb{U}'$-petits $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$, on a :

$$\mathrm{tens}_{\mathrm{id}(0),\,\mathrm{id}(0)}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}') : (\boldsymbol{G}^{\mathrm{op}}) \_ (\boldsymbol{G}'^{\mathrm{op}}) \to (\boldsymbol{G} \_ \boldsymbol{G}')^{\mathrm{op}}$$

$$=$$

$$\mathrm{id}((\boldsymbol{G} \_ \boldsymbol{G}')^{\mathrm{op}}) : (\boldsymbol{G} \_ \boldsymbol{G}')^{\mathrm{op}} \to (\boldsymbol{G} \_ \boldsymbol{G}')^{\mathrm{op}}$$

(puisqu'il est facile de vérifier que, par construction, on a bien :

$$(\boldsymbol{G}^{\mathrm{op}}) \_ (\boldsymbol{G}'^{\mathrm{op}}) \to (\boldsymbol{G} \_ \boldsymbol{G}')^{\mathrm{op}}) .$$

**4.4.g.** Si $\mathbb{U}'$ est un univers, on note :

$$\mathbf{Cat}_{\#,\,\mathbb{U}'} = \boldsymbol{w}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'}(\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'})$$

le système enrichi *localement dual* du système enrichi $\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'}$ (des catégories $\mathbb{U}'$-petites), i.e. le $\boldsymbol{1}$-système enrichi catégorique déduit de $\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'}$ par changement d'enrichissement le long de $\boldsymbol{w}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'} : \mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'} \to \mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$.

En particulier, on voit donc que :

- $(\mathbf{Cat}_{\#,\,\mathbb{U}'})_0 = (\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'})_0$ est l'ensemble des catégories $\mathbb{U}'$-petites,
- pour toutes catégories $\mathbb{U}'$-petites $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}'$, on a :

$$(\mathbf{Cat}_{\#,\,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}(0)}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}')$$

$$=$$

$$(\boldsymbol{w}_{\mathbf{comp},\#,\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}(0)}((\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}(0)}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}'))$$

$$=$$

$$((\mathbf{Cat}_{\mathbb{U}'})_{\mathrm{id}(0)}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}'))^{\mathrm{op}}$$

$$=$$

$$\boldsymbol{Fonc}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}')^{\mathrm{op}} .$$

**4.4.h.** Si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités (resp. si $(\mathbb{U},\mathbb{U}')$ est un couple d'univers emboités et si $\mathbb{B}$ est un ensemble de graphes à composition), on note :

$$\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\,\mathbb{U},\,\mathbb{U}'(,\,\mathbb{B})} : \mathbf{Esq}_{\mathbb{U}(,\,\mathbb{B})} \to \mathbf{Cat}_{\#,\,\mathbb{U}'}$$

le $\mathbf{1}$-pseudo-morphisme $\mathbf{Comp}_{\mathbb{U}'}$-enrichi catégorique évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute esquisse ($\mathbb{B}$-)projective $\mathbb{U}$-petite $\mathbf{E}$, on a :

$$(\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_0(\mathbf{E}) = \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}),$$

- pour toutes esquisses ($\mathbb{B}$-)projectives $\mathbb{U}$-petites $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$, le foncteur :

$$(\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E},\mathbf{E}') : \boldsymbol{Rep}(\mathbf{E},\mathbf{E}') \to \boldsymbol{Fonc}(\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}),\boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}',\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}))^{\mathrm{op}}$$

  est le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on stipule que :

  - pour toute représentation $\rho : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, on a :

$$((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))(\rho) : (\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_0(\mathbf{E}) \to (\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_0(\mathbf{E}')$$

$$=$$

$$\boldsymbol{Mod}_{\#}(\rho,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) : \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E},\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \to \boldsymbol{Mod}(\mathbf{E}',\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}),$$

  - pour toutes représentations $\rho_1, \rho_2 : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ et pour toute métamorphose naturelle $m : \rho_1 \Rightarrow \rho_2$, on a :

$$\begin{array}{ccc}
((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))(m) & & \boldsymbol{Mod}_{\#}(m,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \\
: & & : \\
((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))(\rho_2) & & \boldsymbol{Mod}_{\#}(\rho_2,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}}) \\
\Downarrow & = & \Downarrow \\
((\mathbf{G}_{\mathbf{mod},\#,\mathbb{U},\mathbb{U}'(,\mathbb{B})})_{\mathrm{id}(0)}(\mathbf{E},\mathbf{E}'))(\rho_1) & & \boldsymbol{Mod}_{\#}(\rho_1,\boldsymbol{Ens}_{\mathbb{U}})
\end{array}$$

## 5. Bibliographie.


[Guide-I] D. DUVAL et C. LAIR, *Esquisses et Spécifications, Guide de l'Utilisateur, I : Mosaï ques*, Rapport de Recherche du L.A..C.O., 1999.

[Guide-II] D. DUVAL et C. LAIR, *Esquisses et Spécifications, Guide de l'Utilisateur, II : Spécifications Implicites*, Rapport de Recherche du L.A.C.O.,1999.

[Ref-I] D. DUVAL et C. LAIR, *Esquisses et Spécifications, Manuel de Référence, I : Graphes à Composition*, Rapport de Recherche du L.A.C.O., 1999.

[Ref-II] D. DUVAL et C. LAIR, *Esquisses et Spécifications, Manuel de Référence, II : Esquisses Projectives*, Rapport de Recherche du L.A.C.O., 1999.

[Ref-III] D. DUVAL et C. LAIR, *Esquisses et Spécifications, Manuel de Référence, II : Modèles*, Rapport de Recherche du L.A.C.O., 2000.

[Burroni70] A. BURRONI, *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies*, Esquisses Math. 5, Paris, 1970.

[Ehresmann67a] C. EHRESMANN, *Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires*, C.R.A.S., t. 264, pp. 273-276, Paris, 1967.

[Ehresmann67b] C. EHRESMANN, *Sur les structures algébriques*, C.R.A.S., t. 264, pp. 840-843, Paris, 1967.

[Foltz69] F. FOLTZ, *Sur la catégorie des foncteurs dominés*, Cahiers de Top. et Géom. Diff. XI,2 , Paris, 1969.

[Goguen et al.78] J. A. GOGUEN, J. W. THATCHER, E. G. WAGNER, *An initial algebra approach to the specification, correctness and implementation of abstract data types*, Current Trends in Programming Methodology, vol. IV : Data Structuring, R. T Yeh ed., Prentice-Hall, 1978, 80-149.

[Lair87] C. LAIR, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17, Paris, 1987.

[Mac Lane71] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

[Wirsing90] M. WIRSING, *Algebraic specifications*, Handbook of Theoretical Computer Science, vol. B : Formal Models and Semantics, J. van Leeuwen ed., Elsevier and M.I.T. Press, 1990, 675-788.

# 6. Table