Laboratoire d'Arithmétique, de Calcul formel et d'Optimisation
ESA - CNRS 6090

Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales à un le long de la solution de Lagrange

Delphine Boucher

Rapport de recherche n° 2000-08

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex
Tél. 05 55 45 73 23 - Fax. 05 55 45 73 22 - laco@unilim.fr

http://www.unilim.fr/laco/

Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales à un le long de la solution de Lagrange

Delphine Boucher
LACO
delphine.boucher@unilim.fr

02/03/00

Résumé

Nous considérons le problème plan des trois corps le long de la solution de Lagrange indéxée par un paramètre m_0. Nous supposons que les corps ont tous une masse égale à un. A l'aide du théorème de non-intégrabilité de Morales-Ramis, nous montrons que ce problème n'est pas intégrable quand m_0 est non nul. Nous menons pour cela une étude à la fois locale et globale d'une équation normale variationnelle scalaire calculée le long de cette solution particulière.

Abstract

We consider the planar three-body problem along Lagrange's solution indexed by a parameter m_0. We assume the bodies' masses are all equal to one. Thanks to Morales-Ramis' non integrability theorem, we prove that this problem is not integrable when m_0 is non zero. We carry out both a local and global study of a scalar variational equation computed along this particular solution.

1 Introduction

Le problème des trois corps décrit trois particules en mouvement dans un système de référence newtonien avec, comme seules forces agissant sur elles, leur attraction gravitationnelle mutuelle. Les équations régissant les mouvements de ces corps peuvent être définies par un "système hamiltonien". L'une des questions importantes qui apparaît dans l'étude d'un tel système est de savoir s'il est complètement intégrable le long d'une solution particulière (voir [3]). Nous nous placerons ici dans le plan, le long de la solution particulière de Lagrange; nous supposerons de plus que les trois corps ont tous une masse égale à un. Dans [6], A. Tsyngvitsev utilise un critère dû à Ziglin pour répondre à la question de la non-intégrabilité du système. Un autre outil qui donne une condition nécessaire de non-intégrabilité est le critère galoisien de Morales-Ramis :

Théorème 1 (Morales, Ramis [3]) *Soit $\mathcal{S}$ un système hamiltonien et X_0 une solution particulière de $\mathcal{S}$. Si le système est complètement intégrable le long de la solution X_0, alors la composante connexe de l'identité du groupe de Galois de l'équation normale variationnelle le long de la solution X_0 est abélienne.*

Nous en donnons une spécialisation plus aisée à tester :

Théorème 2 *Soit $\mathcal{S}$ un système hamiltonien et X_0 une solution particulière de $\mathcal{S}$. Si l'équation normale variationnelle le long de la solution X_0 possède au moins une solution formelle contenant un logarithme et si son groupe de Galois différentiel est réductif, alors le système $\mathcal{S}$ n'est pas complètement intégrable le long de la solution X_0.*

A l'aide de ces deux derniers théorèmes, nous établirons le résultat suivant :

Théorème 3 *Le problème plan des trois corps de masses égales à un le long de la solution de Lagrange indéxée par le paramètre m_0 non nul n'est pas complètement intégrable.*

Dans la section 2 nous montrons que si le paramètre m_0 est non nul, alors l'équation normale variationnelle possède des solutions locales contenant des *log* (proposition 1) et le groupe de Galois différentiel est réductif (proposition 2). Dans la section 3, nous prouvons que ce fait est une obstruction à l'intégrabilité (proposition 3) et nous en déduisons les théorèmes 2 et 3.

2 Etudes locale et globale de l'équation normale variationnelle

Le problème plan des trois corps de masses égales à un est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j} \\ \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases}$$

où (x_1, x_2, y_1, y_2), (x_3, x_4, y_3, y_4) et (x_5, x_6, y_5, y_6) sont les trois quadruplets caractérisant la position et le moment de chaque corps dans le plan. L'hamiltonien H est le suivant :

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2)-[(x_3-x_5)^2+(x_4-x_6)^2]^{-\frac{1}{2}}-[(x_5-x_1)^2+(x_6-x_2)^2]^{-\frac{1}{2}}-[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Dans [6], l'auteur réduit le nombre de variables de douze à six par le biais de changements de variables successifs. D'autre part, après un changement symplectique s'inspirant de [3], nous obtenons l'équation normale variationnelle suivante dépendant du paramètre m_0 (voir aussi [6] où l'auteur obtient ce même système en utilisant la réduction de Whittaker) :

$$Y'(x) = A_{m_0}(x)\, Y(x) \tag{1}$$

(la matrice A_{m_0} est donnée en annexe 1).

Lemme 1 *Le système différentiel $Y'(x) = A_{m_0}(x)\, Y(x)$ est équivalent à l'équation différentielle scalaire $L_{m_0}(y(x)) = 0$ définie comme suit :*

- *si* $m_0 = 0$, $L_{m_0}(y(x)) = x^4\, y^{(4)}(x) + 6\, x^3\, y^{(3)}(x) - 4\, x^2\, y^{(2)}(x) - 10\, x\, y'(x) + y(x)$
- *si* $m_0 \neq 0$,
$L_{m_0}(y(x)) = x^4\, (x-1)^4\, y^{(4)}(x) + x^3\, (x-1)^3\, (2x-1)\, y^{(3)}(x) - 3\, (2x^2-2x+1)x^2\, (x-1)^2\, y^{(2)}(x)$
$+3\, (x^2 - x + 2)\, (2x - 1)\, x\, (x - 1)\, y'(x) + 3\, (x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 7x - 2)\, y(x)$.

Preuve
Pour m_0 non nul, l'équation $L_{m_0}(y(x)) = 0$ est obtenue en utilisant le vecteur cyclique $(1, 0, 0, 0)$ et en effectuant le changement de variable $x = -im_0x + \frac{1}{6}m_0\, \sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})$ $(i^2 = -1)$. L'équation $L_0(y(x)) = 0$ est l'équation associée au vecteur cyclique $(0, 1, 1, 0)$. $\square$

Nous montrons que si m_0 est non nul alors il existe des log dans une série en zéro (proposition 1) et le groupe de Galois différentiel G_{m_0} de (1) est réductif (proposition 2).

Proposition 1 *Si m_0 est non nul, alors il existe une solution formelle en 0 contenant un log.*

Preuve
Soit $z(x) = \sum_k z_k x^k$ une série formelle solution, alors les coefficients z_k satisfont la relation

$$f_0(k)z_k + f_1(k-1)z_{k-1} + \cdots + f_4(k-4)z_{k-4} = 0$$

avec $f_0(k) = (k-1)(k-2)(k-3)(k+1)$ et $f_1(k) = -(k-3)(k+1)(k-1)(4k-7)$.
On remarque que $f_0(3)$ et $f_0(2)$ s'annulent tandis que $f_1(2)$ est non nul. D'après [2] page 405, il existe une série solution en zéro comportant des log. □

Proposition 2 *Si m_0 est non nul, alors le groupe G_{m_0} est réductif.*

Preuve
Montrons tout d'abord que l'opérateur L_{m_0} n'a pas de facteur d'ordre unà droite. Il suffit de montrer que l'équation $L_{m_0}(y(x)) = 0$ n'a de solution exponentielle (à dérivée logarithmique rationnelle). Or les ensembles E_0, E_1 et E_∞ des exposants en les singularités 0, 1 et l'infini sont

$$E_0 = E_1 = \{-1, 1, 2, 3\} \text{ et } E_\infty = \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\}.$$

L'équation $L_{m_0}(y(x)) = 0$ est donc une équation fuchsienne et d'après ([5]), ses solutions exponentielles $z(x)$ sont du type :

$$z(x) = x^{\alpha_0}(x-1)^{\alpha_1} q(x)$$

où (α_0, α_1) décrit $E_0 \times E_1$ et $q(x)$ est un polynôme. Une condition nécessaire d'existence de solution exponentielle est donc l'existence d'un entier naturel d (le degré de q) et d'un triplet $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\infty)$ de $E_0 \times E_1 \times E_\infty$ tels que $\alpha_0 + \alpha_1 + d = -\alpha_\infty$. Or l'ensemble des sommes $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty$ quand $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\infty)$ parcourt $E_0 \times E_1 \times E_\infty$ ne contient aucun entier relatif; donc l'équation $L_{m_0}(y(x)) = 0$ ne possède aucune solution exponentielle.
Nous utilisons ensuite [1] pour rechercher les facteurs d'ordre deux de L_{m_0}. L'équation différentielle associée à la deuxième puissance extérieure de l'équation $L_{m_0}(y(x)) = 0$ possède au moins deux solutions exponentielles, solutions pour chacune desquelles les relations de Plücker sont satisfaites. Nous en déduisons deux facteurs à droite d'ordre deux de L_{m_0} notés M_{m_0} et N_{m_0} (voir annexe 2). Comme l'opérateur L_{m_0} ne possède pas de facteur d'ordre un à droite, les deux facteurs M_{m_0} et N_{m_0} sont irréductibles. L'opérateur L_{m_0} est donc complètement réductible. D'après le lemme 2.10 de [4], le groupe G_{m_0} est ainsi réductif. □

3 Démontration du théorème 3

La proposition 3 qui suit va nous aider à montrer le théorème 2 énoncé dans l'introduction.

Proposition 3 *Soit $L(y) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène. de groupe de Galois différentiel G. Si elle possède au moins une solution formelle contenant un log et si le groupe G est réductif, alors la composante connexe G^0 de l'identité dans G n'est pas un groupe abélien.*

Preuve
Soit L un opérateur différentiel d'ordre n à coefficients dans un corps k. Supposons dans un premier temps que L soit irréductible. Si le groupe G^0 est abélien, alors il est résoluble donc, d'après le

théorème de Lie-Kolchin ([5]), il peut être mis sous une forme triangulaire simultanée. Il existe donc une solution y_1 de $L(y) = 0$ telle que $\frac{y_1'}{y_1}$ soit dans le corps laissé fixe par G^0. Comme G^0 est d'indice fini dans G, d'après la correspondance galoisienne, $\frac{y_1'}{y_1}$ est algébrique sur k. Il existe un polynôme P à coefficients dans k tel que $P(\frac{y_1'}{y_1}) = 0$. Considérons alors $u_1 = \frac{y_1'}{y_1}$ et $u_2, \dots, u_m$ les autres racines de $P(X)$. Soit de plus pour j dans $\{2, \dots, m\}$, $y_j = exp(\int u_j)$. Alors $(y_1, \dots, y_m)$ engendre un espace vectoriel W globalement stable sous l'action de G. Or, par hypothèse, ce dernier groupe est irréductible donc l'espace des solutions de $L(y) = 0$ est un sous-espace vectoriel de W. Il existe donc une base de solutions $(y_1, \dots, y_n)$ de $L(y) = 0$ avec $y_j = exp(\int u_j)$ et u_j algébrique sur k. D'autre part, comme chaque u_j est laissé fixe sous l'action de G^0, la droite vectorielle engendrée par y_j est elle aussi invariante sous l'action de G^0. Ce dernier groupe peut donc être exprimé sous une forme diagonale simultanée. Enfin, comme des log apparaissent au niveau des solutions locales de $L(y) = 0$, les groupes locaux correspondant sont unipotents. En particulier le groupe G^0 contient des éléments unipotents et ceci contredit le caractère diagonal de G^0.

Supposons maintenant que l'opérateur L soit réductible. Comme il est de plus complètement réductible, il existe un entier s supérieur à 1 et des opérateurs irréductibles $L_1, \dots, L_s$ tels que L soit le plus petit commun multiple à droite de $L_1, \dots, L_s$. L'espace vectoriel des solutions de L est la somme directe des espaces vectoriels de $L_1, \dots, L_s$ donc il existe au moins un j tel que L_j ait des solutions formelles contenant des log. D'après la première partie de la preuve, la composante connexe de l'identité dans le groupe de Galois de L_j n'est pas un groupe abélien. Or c'est un sous-groupe de G^0, donc le groupe G^0 n'est pas non plus abélien. $\square$

De cette proposition 3 et du théorème 1 de Morales-Ramis, on déduit le théorème 2 donné dans l'introduction. Le théorème 3 est alors une conséquence des propositions 1 et 2 et du théorème 2.

Remarque 1 *Si m_0 est nul, alors nous n'avons pas trouvé d'obstruction à l'intégrabilité. En effet l'équation $L_0(y(x)) = 0$ possède quatre solutions exponentielles (à savoir $x^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$, $x^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$, $x^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}}$ et $x^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$). Le groupe G_{m_0} est donc diagonal et abélien.*

Le développement de ces idées pour l'étude de la non-intégrabilité dans le cas des masses quelconques paraîtra dans un prochain travail (voir aussi [6] pour une étude parallèle).

Remerciements

Je remercie Jacques-Arthur Weil et Mark Van Hoeij pour m'avoir suggéré la proposition 3; Jean-Pierre Ramis pour m'avoir proposé une simplification de la preuve de cette même proposition et pour son attention à ce travail; et enfin Alexei Tsygvintsev de ses fructueuses conversations.

References

[1] Bronstein, M., Petkovsek, M.(1995) On the Factorisation of Skew Polynomials *J.Symb.Comp.* **11, 1-20**

[2] Ince, E. L. (1956) Ordinary Differential Equations *Dover Publications, INC. New York*

[3] Morales-Ruiz, J., Ramis, J.-P. (1998) Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems *prépublication*

[4] Singer, M. F. (1996) Testing reducibility of linear differential operators: a group theoretic perspective, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing,* **7(2)**, *77-104.*

[5] Singer, M. F. (1999). Direct and inverse problems in differential Galois theory. *Selected Works of Ellis Kolchin with Commentary , Bass, Buium, Cassidy, eds., American Mathematical Society, 527-554*

[6] Tsygvintsev, A. (2000) On the meromorphic non-integrability of the three-body problem *Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, Université Paul Sabatier*

Annexe 1

$$A_{m_0}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{Q}{R} & 0 & \frac{4}{9}R & 0 \\ -6\,\frac{m_0}{R} & \frac{1}{2}\,\frac{T}{Q\,R} & 0 & \frac{4}{9}R \\ -\frac{243}{4}\,\frac{1}{R^2} & -81\,\frac{m_0}{R^2\,Q} & \frac{Q}{R} & 6\,\frac{m_0}{R} \\ -81\,\frac{m_0}{R^2\,Q} & \frac{243}{4}\,\frac{S}{R^2\,Q^2} & 0 & -\frac{1}{2}\,\frac{T}{Q\,R} \end{pmatrix},$$

avec $Q = 6\,x - m_0\,\sqrt{3}$, $R = 3\,x^2 - m_0\,\sqrt{3}\,x + m_0^2$, $S = 12\,x^2 - 4\,m_0\,\sqrt{3}\,x - m_0^2$, et $T = (6\,x + (3 - \sqrt{3})\,m_0)\,(6\,x - (3+\sqrt{3})\,m_0)$.

Annexe 2

$$M_{m_0}(y(x)) = y''(x) - \frac{\left(2\,x^3 - 3\,x^2 - (1+i)\right)}{(x-1)x\left(x^2+(2+i)\,x-(1+i)\right)}y'(x) - \frac{x^6+3\,(5+4i)\,x^5+3(-7+2i)\,x^4+2\,(7-17i)\,x^3+6(-1+6\,i)\,x^2-18\,i\,x+2\,i}{(x-1)^2\left(x^2+2\,(i+1)\,x-(1+i)\right)^2x^2}y(x)$$

$$N_{m_0}(y(x)) = y''(x) - \frac{\left(2\,x^3 - 3\,x^2 - (1-i)\right)}{(x-1)x\left(x^2+(2-i)\,x-(1-i)\right)}y'(x) - \frac{x^6+3\,(5-4i)\,x^5+3(-7-2i)\,x^4+2\,(7+17i)\,x^3+6(-1-6\,i)\,x^2+18\,i\,x-2\,i}{(x-1)^2\left(x^2+2\,(1-i)\,x-(1-i)\right)^2x^2}y(x)$$