



Laboratoire d'Arithmétique, de Calcul formel et d'Optimisation
ESA - CNRS 6090

Une nouvelle classification des systèmes différentiels quadratiques homogènes plans

Driss Boularas

Rapport de recherche n° 1999-04

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex
Tél. 05 55 45 73 23 - Fax. 05 55 45 73 22 - laco@unilim.fr

<http://www.unilim.fr/laco/>

UNE NOUVELLE CLASSIFICATION DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUADRATIQUES HOMOGÈNES PLANS

D. BOULARAS¹

Abstract. Utilisant la théorie des invariants, on donne une nouvelle classification des systèmes quadratiques homogènes de dimension deux et à coefficients réels par rapport au groupe linéaire général. Cette classification comporte moins de formes canoniques que celles connues jusqu'à présent. Elle tient compte de façon naturelle des propriétés de réduction du second membre et s'avère qu'elle est plus adéquate aux portraits topologiques présentés dans [5].

Keywords : classification, invariant theory, orbits of linear groups, qualitative theory of ordinary differential systems.

1. Introduction

On note \mathcal{A} la famille des systèmes différentiels quadratiques homogènes plans (SQHP)

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= a_{11}^1(x^1)^2 + 2a_{12}^1x^1x^2 + a_{22}^1y(x^2)^2, \\ \frac{dx^2}{dt} &= a_{11}^2(x^1)^2 + 2a_{12}^2x^1x^2 + a_{22}^2y(x^2)^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

à coefficients réels et G , le groupe des matrices inversibles 2×2 , $p = (p_\alpha^i)_{i,\alpha=1,2}$, à coefficients réels. Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{A} est de dimension 6. On note $GL(\mathcal{A})$ le groupe des automorphismes linéaires de \mathcal{A} . L'action du groupe G sur \mathbb{R}^2 ($(p, x) \mapsto p^{-1}x$) induit une représentation rationnelle

$$\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{A})$$

¹LACO, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Limoges, 123, Avenue A. Thomas, 87060, Limoges, France

où l'image $\rho(p)(a) = b$ est définie par

$$b_{\alpha\beta}^i = \sum_{j=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\delta=1}^2 q_j^1 p_{\alpha}^{\gamma} p_{\beta}^{\delta} a_{\gamma\delta}^j, \quad q = p^{-1}, \quad \forall i, \alpha, \beta = 1, 2.$$

En fait, si l'on désigne par $(\mathbb{R}^2)^*$ le dual de l'espace vectoriel (\mathbb{R}^2) , les expressions de cette représentation indiquent que le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{A} n'est rien d'autre que le produit tensoriel $(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{S}_2$ où \mathcal{S}_2 est l'espace des formes quadratiques symétriques binaires (i.e. quotient de l'espace $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ par le noyau de l'application bilinéaire $(u, v) \mapsto u \otimes v - v \otimes u$). Cette interprétation tensorielle explique l'écriture (1.1) des systèmes différentiels quadratiques homogènes.

Ces lois de transformation ne concernent pas seulement les systèmes différentiels, mais aussi les algèbres non associatives où les $a_{\alpha\beta}^i$ sont les constantes de structure (voir [2]) et les applications polynomiales quadratiques homogènes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (voir [3]).

On dira que deux systèmes a et a' de \mathcal{A} sont G -équivalents s'il existe une transformation $p \in G$ telle que $\rho(p)s = s'$. Cette relation d'équivalence induit une partition de \mathcal{A} en classes d'équivalence appelées G -orbites. Le problème de la classification linéaire (par rapport au groupe G) des systèmes différentiels (1.1) consiste à caractériser ces orbites à l'aide de valeurs d'un nombre fini de fonctions algébriques définies sur \mathcal{A} et constantes sur les orbites.

L'outil naturel pour étudier ce problème est la théorie des invariants.

Ce travail est composé de deux parties. Dans la première, nous rappelons quelques résultats concernant les invariants et covariants des systèmes différentiels quadratiques homogènes plans (systèmes de générateurs des algèbres des invariants et des covariants, propriétés, ...). Dans la deuxième partie, nous exposons la nouvelle classification des systèmes différentiels quadratiques homogènes plans à coefficients réels en privilégiant les propriétés de reductibilité des polynômes du second membre. Cette démarche rapproche davantage les formes canoniques obtenues de la classification géométrique étudiée dans [5].

2. Rappels sur les invariants et covariants des SQHP

2.1. Algèbre des covariants des SQHP. Dans ce travail les covariants sont pris au sens de la définition suivante :

Définition 1. Une fonction polynomiale $Q : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est un covariant de \mathcal{A} par rapport à G si elle vérifie la relation:

$$\forall p \in G, \forall a \in \mathcal{A}, \quad Q(\rho(p)a, p^{-1}x) = \lambda(p)Q(a, x).$$

Un G -invariant de \mathcal{A} est un G -covariant de \mathcal{A} qui ne dépend pas de x .

Cette définition reste valable pour n'importe quel sous-groupe F de G et on parle alors de covariant par rapport à F . Le multiplicateur λ est un caractère du groupe G . Il est égal [5, 9] à une puissance du déterminant de p : $\lambda(p) = \det(p)^{-\kappa}$ où l'entier κ est appelé poids de Q . Si cette puissance est égale à zéro, le covariant est absolu, sinon il est relatif. D'après la définition ci-dessus, un polynôme de $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ est un covariant homogène par rapport à G si, et seulement si, il l'est par rapport au sous-groupe des matrices 2×2 , de déterminant égal à 1, $SL(n, \mathbb{R})$. Cela confère à l'ensemble de tous les covariants (tous absolus par rapport à $SL(n, \mathbb{R})$) de \mathcal{A} une structure d'algèbre et d'après le théorème de Hilbert sur les bases, il possède un système polynomial fini de générateurs.

Le premier problème qui se pose alors à la théorie classique des invariants est la construction de ces systèmes (de préférence minimaux) de générateurs tandis que le second problème consiste en la description de son idéal des syzygies (identités polynomiales entre les covariants, les invariants compris).

Quand le groupe est réductif [10] (ce qui est le cas de G), l'algèbre possède la propriété de Cohen-Macaulay (c'est un module libre de type fini) et les réponses aux deux problèmes ci-dessus permettent de dégager la décomposition d'Hironaka [7].

Pour les systèmes quadratiques homogènes les deux problèmes fondamentaux ont été entièrement résolus [5]. Le système minimal des générateurs de cette algèbre est composée de 13 éléments dont quatre invariants (notation d'Einstein) :

$$\begin{aligned} A &= a_{pr}^\alpha a_{\alpha q}^\beta a_{\beta s}^\gamma a_{\gamma \delta}^\delta \varepsilon^{pq} \varepsilon^{rs}, & B &= a_{pr}^\alpha a_{\alpha q}^\beta a_{\delta s}^\gamma a_{\beta \gamma}^\delta \varepsilon^{pq} \varepsilon^{rs}, \\ C &= a_{pr}^\alpha a_{\beta q}^\beta a_{\gamma s}^\gamma a_{\alpha \delta}^\delta \varepsilon^{pq} \varepsilon^{rs}, & D &= a_{pr}^\alpha a_{qk}^\beta a_{\alpha s}^\gamma a_{\delta l}^\delta a_{\beta \gamma}^\mu a_{\mu \nu}^\nu \varepsilon^{pq} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{kl}, \\ K &= a_{\alpha \beta}^\alpha x^\beta, & L &= a_{\alpha \beta}^p x^\alpha x^\beta x^q \varepsilon_{pq}, & M &= a_{\alpha \beta}^\alpha a_{\gamma \delta}^\beta x^\gamma x^\delta, \\ N &= a_{\beta \gamma}^\alpha a_{\alpha \delta}^\beta x^\gamma x^\delta & R_1 &= a_{\alpha p}^\alpha a_{\gamma q}^\beta a_{\beta \delta}^\gamma x^\delta \varepsilon^{pq}, & R_2 &= a_{\alpha p}^\alpha a_{\delta q}^\beta a_{\beta \gamma}^\gamma x^\delta \varepsilon^{pq}, \\ R_3 &= a_{\beta \nu}^\alpha a_{\alpha \gamma}^\beta a_{\delta \mu}^\gamma x^\delta x^\mu x^\nu, & R_4 &= a_{\mu p}^\alpha a_{\alpha q}^\beta a_{\beta \nu}^\gamma a_{\gamma \delta}^\delta x^\mu x^\nu \varepsilon^{pq}, \\ R_5 &= a_{pr}^\alpha a_{\nu q}^\beta a_{\alpha s}^\gamma a_{\beta \gamma}^\delta a_{\delta \mu}^\mu x^\nu \varepsilon^{pq} \varepsilon^{rs}. \end{aligned}$$

où $\varepsilon^{12} = \varepsilon_{12} = -\varepsilon^{21} = -\varepsilon_{21} = 1$ et $\varepsilon^{11} = \varepsilon_{11} = -\varepsilon^{22} = -\varepsilon_{22} = 0$. Dans la suite, on aura besoin des expressions développées des invariants et covariant :

$$\begin{aligned} A &:= (a_{11}^1)^3 a_{22}^1 - (a_{11}^1)^2 (a_{12}^1)^2 + (a_{11}^1)^2 a_{12}^1 a_{2,22}^1 + (a_{11}^1)^2 a_{22}^1 a_{12}^2 \\ &\quad - 3 a_{11}^1 (a_{12}^1)^2 a_{12}^2 + 2 a_{11}^1 a_{12}^1 a_{22}^1 a_{11}^2 + 2 a_{11}^1 a_{12}^1 a_{12}^2 a_{22}^2 + 2 a_{11}^1 a_{22}^1 a_{11}^2 a_{2,22}^1 \\ &\quad - a_{11}^1 a_{22}^1 (a_{12}^2)^2 + a_{11}^1 a_{12}^2 (a_{22}^2)^2 - a_{12}^1{}^3 a_{11}^2 - (a_{12}^1)^2 a_{11}^2 a_{22}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4 (a_{12}^1)^2 (a_{12}^2)^2 + 2 a_{12}^1 a_{1,22} a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{12}^1 a_{2,11} (a_{22}^2)^2 - 3 a_{12}^1 (a_{12}^2)^2 a_{22}^2 \\
& + 2 a_{22}^1 a_{11}^2 a_{12}^2 a_{22}^2 - a_{22}^1 (a_{12}^2)^3 + a_{11}^2 a_{22}^2^3 - (a_{12}^2)^2 (a_{22}^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B := & (a_{11}^1)^3 a_{22}^1 - (a_{11}^1)^2 (a_{12}^1)^2 + a_{12}^1 a_{22}^2 - (a_{11}^1)^2 a_{22}^1 a_{12}^2 \\
& - a_{11}^1 (a_{12}^1)^2 a_{12}^2 + 4 a_{11}^1 a_{12}^1 a_{22}^1 a_{11}^2 + 3 a_{11}^1 a_{22}^1 (a_{12}^2)^2 + a_{11}^1 a_{12}^2 (a_{22}^2)^2 \\
& - 3 (a_{12}^1)^3 a_{11}^2 + 3 a_{1,12}^2 a_{11}^2 a_{22}^2 - 4 (a_{12}^1)^2 a_{2,12}^2 - 4 a_{12}^1 a_{22}^1 a_{11}^2 a_{12}^2 \\
& - a_{12}^1 a_{11}^2 (a_{22}^2)^2 - a_{12}^1 (a_{12}^2)^2 a_{22}^2 + 2 a_{22}^1 (a_{11}^2)^2 + 4 a_{22}^1 a_{11}^2 a_{2,12} a_{22}^2 \\
& - 3 a_{22}^1 (a_{12}^2)^3 + a_{11}^2 (a_{22}^2)^3 - (a_{12}^2)^2 (a_{22}^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C := & (a_{11}^1)^3 a_{22}^1 - a_{1,11}^2 (a_{12}^1)^2 + (a_{11}^1)^2 a_{12}^1 a_{22}^2 + 3 (a_{11}^1)^2 a_{22}^1 a_{12}^2 + 2 (a_{11}^1)^2 (a_{22}^2)^2 \\
& - 5 a_{11}^1 (a_{12}^1)^2 a_{12}^2 - 4 a_{11}^1 a_{12}^1 a_{12}^2 a_{22}^2 + 3 a_{11}^1 a_{22}^1 (a_{12}^2)^2 + a_{1,11} a_{12}^2 (a_{22}^2)^2 \\
& + (a_{12}^1)^3 a_{11}^2 + 3 a_{12}^1 a_{11}^2 a_{22}^2 - 4 (a_{12}^1)^2 a_{2,12}^2 + 3 a_{12}^1 a_{11}^2 (a_{22}^2)^2 \\
& - 5 a_{12}^1 (a_{12}^2)^2 a_{22}^2 + a_{22}^1 (a_{12}^2)^3 + a_{11}^2 a_{22}^2^3 - (a_{12}^2)^2 (a_{22}^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D := & -4 (a_{12}^1)^4 a_{11}^2 a_{2,12} - 3 (a_{11}^1)^2 (a_{12}^1)^2 a_{12}^2 a_{22}^2 + 3 (a_{11}^1)^2 a_{12}^1 a_{1,22} a_{11}^2 a_{22}^2 \\
& - 3 (a_{11}^1)^2 (a_{22}^1)^2 a_{2,11} a_{12}^2 - (a_{11}^1)^2 a_{12}^2 a_{2,22}^3 - (a_{22}^1)^2 a_{11}^2 (a_{12}^2)^3 \\
& - 3 a_{11}^1 (a_{22}^1)^2 a_{11}^2 (a_{12}^2)^2 + a_{11}^1 a_{22}^1 a_{12}^2 a_{22}^2 - 6 (a_{12}^1)^3 a_{11}^2 a_{2,12} a_{22}^2 \\
& + 3 (a_{12}^1)^2 a_{22}^1 a_{2,11}^2 a_{22}^2 - 4 (a_{12}^1)^2 (a_{12}^2)^3 a_{22}^2 + 4 a_{1,12} a_{22}^1 (a_{12}^2)^4 \\
& - 2 a_{12}^1 (a_{12}^2)^3 a_{22}^2 + a_{22}^1 (a_{11}^2)^2 (a_{22}^2)^3 + 2 a_{22}^1 (a_{12}^2)^4 a_{22}^2 + a_{12}^1 a_{22}^1 (a_{11}^2)^2 \\
& + (a_{11}^1)^4 a_{22}^1 a_{22}^2 - (a_{11}^1)^3 (a_{22}^1)^2 a_{11}^2 + 2 a_{1,11}^2 (a_{12}^1)^3 a_{12}^2 + 4 a_{11}^1 (a_{12}^1)^3 (a_{12}^2)^2 \\
& + (a_{11}^1)^3 a_{12}^1 a_{22}^2 + a_{11}^1 (a_{12}^1)^2 (a_{22}^2)^3 + 3 a_{1,12} a_{22}^1 (a_{11}^2)^2 (a_{22}^2)^2 \\
& - 3 a_{12}^1 a_{22}^1 a_{11}^2 a_{2,12} a_{22}^2 + 2 a_{12}^1 a_{11}^2 a_{12}^2 (a_{22}^2)^3 - 3 a_{22}^1 a_{2,11} (a_{12}^2)^2 (a_{22}^2)^2 \\
& + 3 a_{11}^1 (a_{12}^1)^2 a_{11}^2 (a_{22}^2)^2 + 6 a_{11}^1 a_{12}^1 a_{1,22} (a_{12}^2)^3 + a_{11}^1 a_{12}^1 a_{2,11} (a_{22}^2)^3 \\
& + 3 a_{11}^1 a_{12}^1 (a_{12}^2)^2 (a_{22}^2)^2 - a_{11}^1 a_{11}^2 a_{22}^2^4 - (a_{11}^1)^3 (a_{12}^1)^2 a_{22}^2 \\
& - 2 (a_{11}^1)^3 a_{12}^1 a_{22}^1 a_{12}^2 - (a_{11}^1)^3 a_{22}^1 a_{12}^2 a_{22}^2 + 3 (a_{11}^1)^2 (a_{12}^1)^2 a_{1,22} a_{11}^2 \\
& - 2 a_{11}^1 (a_{12}^1)^4 a_{11}^2 - 3 (a_{11}^1)^2 a_{1,22} (a_{12}^2)^2 a_{22}^2 - a_{11}^1 a_{1,12}^3 a_{11}^2 a_{22}^2 \\
& + 3 a_{11}^1 (a_{12}^1)^2 a_{22}^1 a_{11}^2 a_{12}^2 - 3 a_{11}^1 a_{22}^1 a_{11}^2 a_{12}^2 (a_{22}^2)^2
\end{aligned}$$

$$K := (a_{11}^1 + a_{12}^2) x^1 + (a_{12}^1 + a_{22}^2) x^2$$

$$L := -a_{11}^2 (x^1)^3 + (a_{11}^1 - 2 a_{2,12}) x^2 (x^1)^2 + (2 a_{12}^1 - a_{22}^2) (x^2)^2 x^1 + a_{22}^1 (x^2)^3$$

$$\begin{aligned}
M := & ((a_{11}^1)^2 + a_{12}^1 a_{11}^2 + a_{11}^1 a_{12}^2 + a_{11}^2 a_{22}^2) (x^1)^2 \\
& + (2 a_{11}^1 a_{12}^1 + 4 a_{12}^1 a_{12}^2 + 2 a_{12}^2 a_{22}^2) x^2 x_1 \\
& + (a_{11}^1 a_{22}^1 + a_{22}^1 a_{2,12} + a_{12}^1 a_{22}^2 + (a_{22}^2)^2) (x^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N := & (2 a_{12}^1 a_{11}^2 + a_{12}^2)^2 + (a_{11}^1)^2) (x^1)^2 \\
& + (2 a_{12}^1 a_{12}^2 + 2 a_{12}^2 a_{22}^2 + 2 a_{11}^1 a_{12}^1 + 2 a_{1,22} a_{11}^2) x^2 x^1 \\
& + ((a_{22}^2)^2 + (a_{12}^1)^2 + 2 a_{1,22} a_{12}^2) (x^2)^2.
\end{aligned}$$

Toujours dans [5], il est établi que l'idéal des syzygies des invariants est engendré par :

$$C^2 B - A^3 - 2D^2 + A^2 C - AC^2 = 0 \quad (2.2)$$

et celui des covariants des **SQHP** par :

$$\begin{aligned}
CL - MR_2 + K^2 R_1 &= 0, \\
K^2(A + C) - 2CM + 2R_2^2 &= 0, \\
C(K^2 - M) + 2R_1 R_2 + AM - CN &= 0, \\
CR_1 + KD + (A - C)R_2 &= 0, \\
KM(C - B) + 2(KR_1^2 + MR_5) - 2CR_3 &= 0, \\
CK(R_1 - R_2) + AKR_1 + DM - CR_4 &= 0, \\
A^2 K - 2DR_2 + BCK - 2CR_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la décomposition complète d'Hironaka [7] de la sous-algèbre des invariants des SQHP est :

$$\mathbb{R}[A, B, C]D \oplus \mathbb{R}[A, B, C].$$

2.2. Propriétés algébriques et géométriques des invariants A, B et C et des covariants K, N et L . Dans toute la suite, les covariants seront considérés comme des polynômes de $F[x^1, x^2]$ où F est l'anneau des fonctions polynomiales $\mathbb{R}[\mathcal{A}]$. Un covariant nul définit une variété algébrique dans \mathcal{A} .

On remarque que le jacobien du champ de vecteurs associé au système différentiel (1.1) est égal à $4U$ où $U = (K^2 - N)$ et sa divergence à $2K$.

Dans la nouvelle classification que nous proposons, nous commençons par isoler les systèmes dont l'étude se ramène, à un facteur près, à celle des champs de vecteurs linéaires ou constants. Nous qualifierons ces systèmes quadratiques de "dégénérés".

Il sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} (ux + vy).$$

Lemme 1. ([5],p.56) *Le système différentiel (1.1) est “dégénéré” si, et seulement si, $\alpha = 0$.*

Preuve. Ici, la “dégénérescence” équivaut à dire que les deux polynômes $a_{11}^1(x^1)^2 + 2a_{12}^1x^1x^2 + a_{22}^1(x^2)^2$ et $a_{11}^2(x^1)^2 + 2a_{12}^2x^1x^2 + a_{22}^2(x^2)^2$ admettent un facteur commun, c’est-à-dire, que leur résultant, égal à α , est nul.

On complète ce lemme par :

Lemme 2. *Le système différentiel (1.1) peut se ramener à la forme*

$$\frac{dx^1}{dt} = 0, \quad \frac{dx^2}{dt} = a_{\alpha\beta}^2 x^\alpha x^\beta$$

par une transformation linéaire si, et seulement si, $U = 0$.

Preuve. La condition nécessaire est triviale. Supposons que $U = 0$. Alors,

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 \end{vmatrix} (x^1)^2 + \begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{22}^1 \\ a_{11}^2 & a_{22}^2 \end{vmatrix} x^1 x^2 + \begin{vmatrix} a_{12}^1 & a_{22}^1 \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 \end{vmatrix} (x^2)^2 = 0.$$

Cela entraîne dans tous les cas qu’il existe deux constantes réelles k_1 et k_2 telles que $k_1^2 + k_2^2 = 1$ et $k_1 a_{\alpha\beta}^1 x^\alpha x^\beta + k_2 a_{\alpha\beta}^2 x^\alpha x^\beta = 0$.

La rotation $X^1 := k_1 x^1 + k_2 x^2$, $X^2 := -k_2 x^1 + k_1 x^2$ réduit le système à la forme cherchée.

Lemme 3. ([5],p.56) *La droite $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = 0$ est une intégrale particulière du système différentiel (1.1) si, et seulement si, $L(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.*

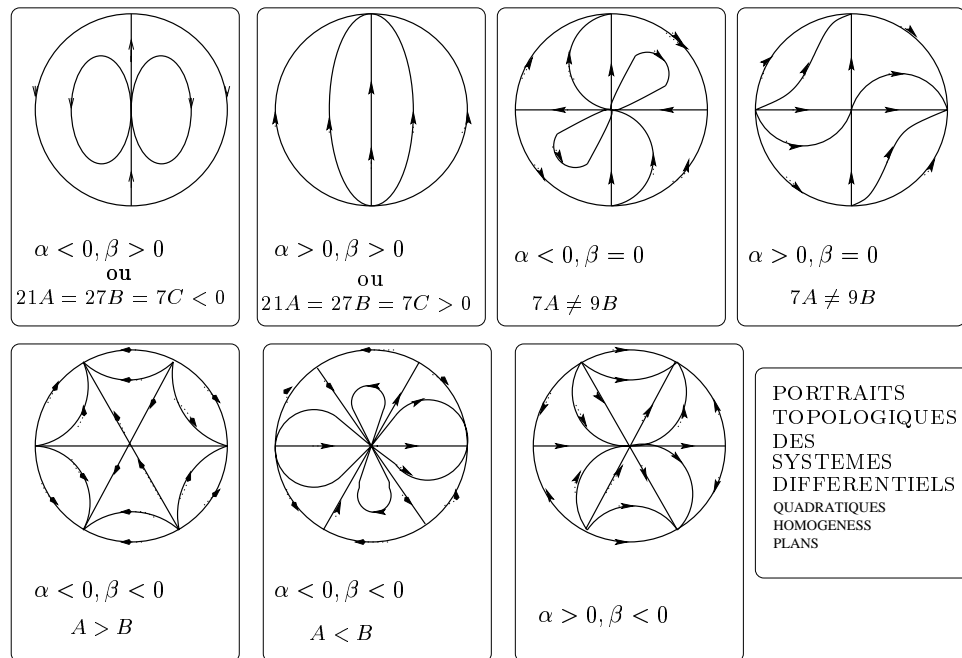
Remarque 1. *Le discriminant de la forme quadratique U est égal à 8α où $\alpha = B + C - 2A$ et celui de la forme quadratique L est égal à $-\beta$ où $\beta = 27B - C - 18A$.*

3. Classification linéaire des SQHP

Dans cette partie, on substitue x^1 par x et x^2 par y .

3.1. La classification de Sibirskii. Toutes les classifications réalisées jusqu’à présent ([1, 2, 3, 4, 5]) sont basées sur le nombre et la multiplicité des droites intégrales du système (1.1). Elles prennent comme point de départ les formes canoniques du covariant (forme cubique) L et ne tiennent pas compte du tout du caractère de dégénérescence (aspect algébrique) de (1.1).

Une synthèse de ces travaux a abouti , dans le travail de C.S. Sibirskii [5], à quatre tableaux où l'auteur obtient les différentes classes topologiques, géométriques et algébriques des SDQHP. Ici, nous en rapportons deux, le premier concernant la classification topologique dans le cas non dégenéré $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ on se ramène aux systèmes linéaire) :



et le second, à la classification linéaire :

	CONDITIONS INVARIANTES	FORMES RÉDUITES	
1	$L = 0$	$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0;$	
2	$L = 0, K \neq 0$	$\frac{dx}{dt} = x^2, \frac{dy}{dt} = xy$	
3	$\beta < 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx^2 + (c-1)xy \\ \frac{dy}{dt} = (b-1)xy + cy^2; \end{cases}$	équations 3.3 $D > 0$
4	$\beta = 0, D \neq 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx^2 + xy \\ \frac{dy}{dt} = (b-1)xy + y^2; \end{cases}$	$(9b-7)\frac{\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{A}{\sqrt[3]{D^2}}$
5	$B = 0, K = 0$	$\frac{dx}{dt} = x^2, \frac{dy}{dt} = -2xy;$	
6	$A = B = C = 0$ $KL \neq 0, 3M \neq 2K^2$	$\frac{dx}{dt} = bx^2, \frac{dy}{dt} = (b-1)xy;$	$\frac{2b}{3b-1} = \frac{M}{K^2}$
7	$A = B = C = 0$ $KL \neq 0, 3M = 2K^2$	$\frac{dx}{dt} = x^2, \frac{dy}{dt} = -x^2 + xy;$	-
8	$L \neq 0, K = N = 0$	$\frac{dx}{dt} = x^2, \frac{dy}{dt} = -x^2;$	-
9	$\beta = D = 0, C \neq 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy \\ \frac{dy}{dt} = \text{sgn}(C)x^2 + y^2; \end{cases}$	-
10	$\beta > 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx^2 + (c+1)xy \\ \frac{dy}{dt} = -x^2 + bxy + cy^2; \end{cases}$	équations 3.4 $b \geq 0$

où les différentes équations pour le cas $\beta < 0$ sont :

$$(c-b)^3 + \frac{4(C-3A)}{\beta}(c-b) + \frac{16\sqrt{2}|D|}{\sqrt{|\beta|^3}} = 0;$$

$$3(b+c) = 2 - \frac{8C\sqrt{|\beta|}(c-b)}{8\sqrt{2}D - [\sqrt{|\beta|}(c-b)]^3} \quad (3.3)$$

et pour le cas $\beta > 0$ sont :

$$\begin{aligned} 4(A-B) &= -(c+1)[b^2 + (c-1)^2]; \\ b^3 - \frac{4(C-3A)}{\beta}b - \frac{16\sqrt{2}|D|}{\sqrt{|\beta|^3}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Fait curieux, l'invariant α qui joue un rôle important dans la classification topologique (et donc, aussi géométrique) ne se retrouve dans la classification linéaire. Le point de départ de notre classification est le covariant U dont le discriminant est justement α .

3.2. Formes réduites des SQHP. Les formes réduites de la forme quadratique (qui est un covariant absolu) U sont :

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha = 0$ et $U \neq 0$	$U = 0$
$2\varepsilon(x^2 + y^2)$	$2xy$	$2\varepsilon x^2$	0

où ε est le signe de la forme quadratique U quand il est défini.

Théorème 1. *Par une transformation linéaire, tout système (1.1) peut se ramener à l'une des formes canoniques suivantes :*

	CONDITIONS INVARIANTES	FORMES RÉDUITES
(I)	$\alpha < 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2mxy \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-\varepsilon}{m}x^2 + 2exy + \frac{\varepsilon}{m}y^2; \end{cases}$
(II)	$\alpha > 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax^2 + by^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + dy^2; \end{cases}$
(III)	$\alpha = 0$ et $U \neq 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax^2 + 2bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + 2dxy; \end{cases}$
(IV)	$U = 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = ax^2 + 2bxy + cy^2; \end{cases}$

Preuve. D'après les lemmes 1 et 2, lorsque $\alpha = 0$ le système (1.1) se réduit à l'une des formes (III) ou (IV).

Supposons $\alpha > 0$. Par la transformation qui réduit U à la forme (II) le système transformé vérifie les relations

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{22}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} a_{12}^1 & a_{22}^1 \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $\alpha \neq 0$, les deux équations ne peuvent avoir de facteur commun. Les vecteurs colonnes $(a_{11}^1, a_{12}^1)^T$ et $(a_{22}^1, a_{22}^2)^T$ ne peuvent pas s'annuler. Si le vecteur colonne $(a_{12}^1, a_{12}^2)^T$ n'est pas nul, la première et la troisième relations impliquent la colinéarité des deux équations, c'est-à-dire, d'après le lemme 2, que $U = 0$. Cela contredit le fait que $\alpha \neq 0$. D'où $a_{12}^1 = a_{12}^2 = 0$.

Reste le cas où $\alpha < 0$. La forme quadratique $U = \varepsilon(x^2 + y^2)$ qui correspond à :

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 \end{vmatrix} = \varepsilon, \quad \begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{22}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{12}^1 & a_{22}^1 \\ a_{12}^2 & a_{22}^2 \end{vmatrix} = \varepsilon.$$

est invariante par toute rotation. Or, d'après la remarque

Remarque 2. Le transformé du coefficient a_{22}^1 par l'application linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

est égal à $L(p_2^1, p_2^2)$.

il en existe toujours une qui annule le coefficient a_{22}^1 . De plus, sachant que $\alpha \neq 0$, on a nécessairement, dans le système transformé,

$$a_{11}^1 = 0, \quad a_{12}^1 a_{11}^2 = -\varepsilon, \quad a_{12}^1 a_{11}^2 = \varepsilon.$$

Le théorème 1 est démontré.

L'étape suivante de la classification consiste à identifier les orbites en évaluant les paramètres de chaque forme canonique à l'aide des invariants absolus, c'est-à-dire, de quantités qui ne dépendent que de la classe d'équivalence à laquelle appartient le système. A l'exception des deux premiers cas, cela va nécessiter une partition encore plus fine de la famille des systèmes (1.1).

3.3. Caractérisation des orbites. On reprend les formes réduites des **SDQP**.

3.3.1 Cas où $\alpha < 0$

Pour la forme réduite (I), on a

$$\begin{aligned} A &:= -\frac{4m^6 e^2 - m^4 + m^2 e^2 + 1 - m^6 \varepsilon + 3e^2 \varepsilon m^4 + m^2 \varepsilon}{m^4}, \\ B &:= -\frac{4m^6 e^2 + 3m^4 + m^2 e^2 + 1 - 3m^6 \varepsilon + e^2 \varepsilon m^4 - m^2 \varepsilon}{m^4}, \\ C &:= -\frac{m^6 \varepsilon + 4m^6 e^2 + 5e^2 \varepsilon m^4 + 3m^2 \varepsilon + 3m^4 + m^2 e^2 + 1}{m^4}, \\ \alpha &:= -8, \quad \beta = -8 \frac{(2m^2 - \varepsilon)(1 + m^2 e^2 - 2m^\varepsilon)}{m^4}, \\ L &= \frac{x\varepsilon(x^2 - 2emxy + (2m^2 - \varepsilon)y^2)}{m} \quad U := 2\varepsilon(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Des expressions des invariants relatifs A , B et C on déduit un système de deux équations vérifiées par les paramètres m et e :

$$m^2 e^2 + 2\varepsilon m^2 \frac{B - C}{\alpha} + (m^4 + 1) = 0 \quad (3.5)$$

$$m^6 + \varepsilon \frac{3B - C - 2A}{\alpha} m^4 + \frac{3B - A}{\alpha} m^2 + \varepsilon \frac{B - A}{\alpha} = 0. \quad (3.6)$$

dont les coefficients sont des invariants rationnels absolus.

À priori, ces équations pourraient admettre douze solutions (e, m) qui correspondraient à des systèmes différentiels différents. Donc, rien ne prouve qu'elles caractérisent l'orbite. En fait, c'est le cas puisque qu'on va montrer que ces systèmes, si différents soient-ils, appartiennent à la même orbite (sont équivalents).

Remarquons d'abord que la substitution $x \leftrightarrow -x, y \leftrightarrow y$ transforme e en son opposé en laissant tous les autres coefficients de la forme réduite (1), inchangés. Donc, connaissant m , modulo la transformation $x \leftrightarrow -x, y \leftrightarrow y$, l'équation 3.5 admet une solution unique. Cela explique d'ailleurs le fait que le degré minimal de l'équation vérifiée par e est au moins égal à deux.

Pour m , l'explication est d'abord géométrique. En effet, la forme réduite (1) est obtenue à partir du système de coordonnées dans lequel la forme quadratique U est égale à $2\varepsilon(x^2 + y^2)$ à l'aide d'une rotation qui annule le coefficient a_{22}^1 . Vue l'expression du covariant L et d'après le lemme 3, cela signifie en fait que la rotation est choisie de telle sorte que l'axe des y soit une droite intégrale : $L = x(ux^2 + vxy + wy^2)$. Comme il peut exister trois droites intégrales, la rotation peut être choisie de six manières différentes. Cela explique le degré 6 de l'équation vérifiée par m . Plus précisément, parmi ces rotations, il y a trois qui sont des composées des trois autres et de la symétrie centrale $x \leftrightarrow -x, y \leftrightarrow -y$. D'où la nature bicarrée de l'équation 3.6. Calculons son discriminant (par rapport à m^2) :

$$\Delta = -1024(-C + 27B - 18A)(-A^3 + A^2C - C^2A + BC^2)$$

et d'après la syzygie (2.2),

$$\Delta = 2048\beta D^2.$$

Si $\beta = 0$, nécessairement, $\varepsilon = 1$. Dans ce cas, $\alpha = 4(7B - 5A)$ et l'équation 3.6 devient

$$\begin{aligned} 4(7B - 5A)m^6 + 8(2A - 3B)m^4 + (3B - A)m^2 + B - A \\ = (2m^2 - 1)^2[(7B - 5A)m^2 + B - A]. \end{aligned}$$

Sachant que, dans le cas où $\beta = 0$, la droite intégrale $x_1 = 0$ est triple si, et seulement si, $e = 0$ et $2m^2 - 1 = 0$. Ceci équivaut bien à poser dans l'équation ci-dessus, $9B - 7A = 0$.

Dans tous les cas il y a autant sinon plus de droites intégrales que de solutions de l'équation 3.6.

3.3.2 Cas où $\alpha > 0$

Pour la forme réduite (II) on a :

$$A := a^3 b + 2 a b c d + c d^3, \quad B := a^3 b + 2 b^2 c^2 + c d^3, \quad C := a^3 b + 2 a^2 d^2 + c d^3, \\ U := 2 x^1 x^2 (-b c + a d), \quad L := -c x^{13} + a x^2 x^{12} - d x_2^2 x^1 + b x^{23}$$

D'où,

$$\alpha = 2(-bc + ad)^2$$

$$A - B := 2bc(ad - bc), \quad C - A := 2ad(ad - bc)$$

On remarque que si $A - C \neq 0$, alors $ad \neq 0$ et par la transformation

$$x \leftrightarrow ax, \quad y \leftrightarrow dy,$$

la forme réduite (II) se ramène au système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + by^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + y^2; \end{cases}$$

où b et c vérifient le système d'équations déduites respectivement des expressions de $\frac{A}{\alpha}$, $\frac{B}{\alpha}$, $\frac{C}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} 2Ab^2c^2 - 2(C+B)bc + (2A-B-C)(b+c) + 2A &= 0 \\ 2(2A-C)b^2c^2 + -4Bbc + (2A-C-B)(b+c) + 2B &= 0 \\ 2Cb^2c^2 + (2A-C-B)(b+c) - 4Cbc + 2(2A-B) &= 0, \end{aligned}$$

qui équivaut à

$$\begin{aligned} 2Ab^2c^2 - 2(C+B)bc + (2A-B-C)(b+c) + 2A &= 0, \\ B - A + (-B+C)bc + (-C+A)b^2c^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si $A - C = 0$, alors nécessairement, $B - C \neq 0$ et modulo une transposition $x \leftrightarrow y$, on peut toujours se ramener à poser $a = 0$. Dans ce cas, à l'aide de la transformation

$$x \leftrightarrow \sqrt[3]{bc^2}x, \quad y \leftrightarrow \sqrt[3]{b^2c}y,$$

le système (forme réduite (II)) se ramène à la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -x^2 + dy^2; \end{cases}$$

où d vérifie la relation $\alpha d^3 + 2A = 0$.

Remarquons que lorsque $A - C = 0$, les équations 3.7 admettent pour solution le couple $(-1, -1)$.

Ainsi, sous la condition $\alpha > 0$, le système initial se ramène à la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = |\operatorname{sgn}(A - C)|x^2 + by^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + dy^2; \end{cases}$$

où (b, c, d) est la solution du système d'équations

$$\begin{aligned} 2Ab^2c^2 - 2(C+B)bc + (2A - B - C)(b+c) + 2A &= 0, \\ B - A + (-B + C)bc + (-C + A)b^2c^2 &= 0, \\ (1 - |\operatorname{sgn}(A - C)|)(\alpha d^3 + 2A) + (d - 1)|\operatorname{sgn}(A - C)| &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Notons que les deux premières équations de 3.8 nous donnent des couples de solutions symétriques (v_1, v_2) que l'on ne sait pas, à priori, faire correspondre aux paramètres b, c . Pour identifier laquelle des valeurs v_i attribuer à b ou à c , on utilise l'invariant absolu $\frac{A}{\alpha}$. En effet, en opérant les deux substitutions possibles dans cet invariant, on obtient

$$\frac{a^3v_1 + 2adv_1v_2 + d^3v_2}{2(ad - v_1v_2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{a^3v_2 + 2adv_1v_2 + d^3v_1}{2(ad - v_1v_2)^2}$$

dont la différence est égale à

$$\frac{(a - d)(v_1 - v_2)(a^2 - ad + d^2)}{2(ad - v_1v_2)^2}.$$

Cette expression est nulle si, et seulement si, $a = d$ ou $v_1 = v_2$. Dans les deux cas, la transposition $x \leftrightarrow y$, transforme l'un en l'autre. Par conséquent, la valeur de l'invariant absolu $\frac{A}{\alpha}$ identifie le couple (v_1, v_2) à retenir.

3.3.3 Cas : $\alpha = 0$, $U \neq 0$

Pour la forme réduite (III), on a :

$$A := -b^2(a^2\varepsilon^2 + 3a\varepsilon d + bc\varepsilon + 4d^2)$$

$$B := -b^2(a^2\varepsilon^2 + a\varepsilon d + 3bc\varepsilon + 4d^2)$$

$$C := -b^2(a^2\varepsilon^2 + 5a\varepsilon d - bc\varepsilon + 4d^2)$$

$$D := 2b^3 \varepsilon (a \varepsilon + 2d) (da - bc)$$

$$U := 2x^2 \varepsilon (da - bc)$$

Deux cas se présentent :: $b \neq 0$ ($A - B \neq 0$) et $b = 0$ ($A - B = 0$). Dans le premier cas, à l'aide du changement de variables $x \leftrightarrow x, y \leftrightarrow \frac{ax + 2by}{2}$, le système se ramène à :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + 2dxy. \end{cases}$$

Comme $U \neq 0$, d'après le lemme 2, $c \neq 0$. Au besoin de changer x en $-x$, on peut supposer que $c > 0$. Par conséquent, si $A - B \neq 0$, le système du départ est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon x^2 + 2dxy; \end{cases}$$

où d est la solution positive ou nulle de l'équation

$$(A - B)^3 d^2 - D^2 = 0.$$

Dans le deuxième cas ($b = 0$), sachant que $U \neq 0$, on a nécessairement $ad \neq 0$. On peut supposer $a = 1$. On remarque que par la transformation $x \leftrightarrow x, y \leftrightarrow ux + y$, le coefficient c se transforme en $u(a - 2d) + c$. Si $2M - 3U = 2(a - 2d)x^2 \neq 0$, par un choix convenable de u , on peut ramener le système à la forme

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x^2 \quad \frac{dy}{dt} = 2dxy;$$

où $d = \frac{U}{2M - U}$. Sinon, il est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + xy; \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque $A - B = 0$, le système se ramène à la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + 2dxy; \end{cases}$$

où $d = \frac{U}{2M - U}$ et $c = 0$, si $2M - 3U \neq 0$ et $c = 10$ si $2M - 3U = 0$.

3.3.4 Cas : $U = 0$

D'après le lemme ??, le système général se ramène à la forme

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

pour laquelle $A = B = C = c^2(ac - b^2)$, $K = bx + cy$ et $M = c(ax^2 + 2bxy + cy^2)$. On peut remarquer que le covariant $M \neq 0$ se ramène à la forme $c(ac - b^2)x^2 + y^2$ par une transformation triangulaire inférieure qui laisse la forme du système invariante. Donc, si $U = 0$ et $M \neq 0$, le système est équivalent à

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \operatorname{sgn}(A)x^2 + y^2.$$

Si $M = 0$ et $K \neq 0$, alors $c = 0$ et $b \neq 0$ et la substitution $y \leftrightarrow \frac{a}{2}x + by$ permet de réduire le système à la forme

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 2xy$$

Si $K = 0$, le système du départ est équivalent à

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \mu x^2$$

où μ est égal à 1 si $L \neq 0$, à 0 sinon.

Théorème 2. *Tout système différentiel quadratique homogène plan à coefficients réels est linéairement équivalent à l'un des systèmes suivants :*

	Conditions invariantes	Formes canoniques	Caractérisation de l'orbite
1	$\alpha < 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2mxy \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-\varepsilon}{m}x^2 + 2exy + \frac{\varepsilon}{m}y^2; \end{cases}$	équations (3.5), (3.6) $\varepsilon = \text{sgn}(U)$
2	$\alpha > 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \text{sgn}(A - C) x^2 + by^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + dy^2; \end{cases}$	équations (3.8)
3	$\alpha = 0$ $A - B \neq 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon x^2 + 2dxy; \end{cases}$	$d = \sqrt{\frac{D^2}{(A - B)^3}}$ $\varepsilon = \text{sgn}(U)$
4	$\alpha = 0,$ $A - B = 0$ $U \neq 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx^2 + 2xy; \end{cases}$	$d = \frac{U}{2M - U},$ $c = \begin{cases} 0 \text{ si } 2M - 3U \neq 0, \\ 1 \text{ si } 2M - 3U = 0. \end{cases}$
5	$U = 0,$ $M \neq 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = \text{sgn}(A)x^2 + y^2; \end{cases}$	
6	$U = 0,$ $M = 0,$ $K \neq 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 2xy \end{cases}$	
7	$U = 0,$ $K = 0$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = \mu x^2 \end{cases}$	$\mu = \begin{cases} 0 \text{ si } L = 0, \\ 1 \text{ si } L \neq 0. \end{cases}$

Remarque 3. *La classification faite ci-dessus n'est pas seulement valable pour les systèmes différentiels mais aussi pour les transformations quadratiques de \mathbb{R}^2 et pour les algèbres de Lie réelles de dimension 2 où les coefficients $a_{\alpha\beta}^i$ sont les constantes de structure. Pour ces deux catégories d'objets, les lois de transformation des coefficients sous l'action du groupe G sont les mêmes.*

References

- [1] L. S. LYAGINA, Integral'nye Krivi'ye Uravneniya $y' = (a^2 + bxy + cy^2)/(dx^2 + exy + fy^2)$, *Uspekhi Mat.Nauk*, VI, 2(42) (1951), 171 - 183.
- [2] L. MARKUS, Quadratic Differential Equations and Non-associative algebras, *Annals of Mathematical Studies*, vol 45, 5 (1960), 185 - 213.
- [3] T. DATE, Classification and Analysis of Two-dimensional Real Homogeneous Quadratic Differential Equation Systems, *Journal of Differential Equations*, vol 32, 3 (1979), 311 - 323.
- [4] C.S. SIBIRSKII, Algebraic invariants of differential equations and matrices, *Shtiintsa, Kishinev, Moldova (1976)* (en russe).
- [5] C.S. SIBIRSKII, Introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations, *Nonlinear Science, Theory and Applications, Manchester University Press, 1988*.
- [6] G.LUBCZONOK, Completeness of the polynomial invariants of compact groups, *Annales Polonici Mathematici*, XXVII, 3(1973), 247-256.
- [7] B. STURMFELS, Algorithms in Invariant Theory, *Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag, Wien New York, 1993*
- [8] H. WEYL, The classical groups, their invariants and representations. *Princeton 1939*.
- [9] J.DIEUDONNÉ, J.CARRELL, Invariant theory, old and new, *Advances in Math.* 4 (1970), 1-80.
- [10] M.HOCHSTER, J.ROBERTS, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, *Advances in Math.* 13 (1974), 115-175.