



**Laboratoire d'Arithmétique, de Calcul formel et d'Optimisation  
ESA - CNRS 6090**

---

**Systemes récurrents et algèbre de Hadamard  
de suites récurrentes linéaires sur des anneaux commutatifs**

**Abdelkader Necer**

Rapport de recherche n° 1998-04

---

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex  
Tél. 05 55 45 73 23 - Fax. 05 55 45 73 22 - laco@unilim.fr

<http://www.unilim.fr/laco/>



# Systèmes récurrents et algèbre de Hadamard de suites récurrentes linéaires sur des anneaux commutatifs\*

Abdelkader NECER<sup>†</sup>

## Résumé

En réponse à une question de V. E. HOGGAT, JR., BÉLA ZAY montre que les solutions d'un système récurrent homogène sur  $\mathbb{R}$ , sont des suites récurrentes linéaires. Nous nous proposons d'étendre son résultat à des systèmes récurrents (homogènes ou non) sur des modules sur des anneaux commutatifs. Nous appliquerons le théorème principal pour établir quelques propriétés de suites récurrentes linéaires sur des modules et algèbres. Nous redémontrons, en particulier, un résultat récent dû à U. Cerruti et F. Vaccarino, et qui affirme que le produit de Hadamard de deux suites récurrentes linéaires sur un anneau commutatif est encore une suite récurrente linéaire.

## 1 Introduction

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Dans toute la suite  $I$  désigne l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  et  $m_1, \dots, m_r$  sont des entiers rationnels strictement positifs. Soit  $U^j = (u_n^j)_{n \geq 0}$ , ( $j \in I$ ), une famille de suites de nombres réels de termes initiaux  $u_0^j, \dots, u_{m_j-1}^j$ , ( $j \in I$ ). Soit  $c_{i,j,l}$  ( $(i, j) \in I^2$ ;  $0 \leq l \leq m_j$ ) des nombres réels. On suppose que les suites  $U^1, \dots, U^r$  vérifient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{m_1} c_{1,1,l} u_{n+l}^1 + \cdots + \sum_{l=0}^{m_r} c_{1,r,l} u_{n+l}^r = 0, \\ \sum_{l=0}^{m_1} c_{2,1,l} u_{n+l}^1 + \cdots + \sum_{l=0}^{m_r} c_{2,r,l} u_{n+l}^r = 0, \\ \vdots \\ \sum_{l=0}^{m_1} c_{r,1,l} u_{n+l}^1 + \cdots + \sum_{l=0}^{m_r} c_{r,r,l} u_{n+l}^r = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

---

\*1991 Mathematics Subject Classification : 11B83, 11C20, 13C99

<sup>†</sup>Faculté des Sciences. Mathématiques. 123, av. A. Thomas 87060 Limoges Cedex.

et que

$$\det ((c_{i,j,m_j}))_{1 \leq i,j \leq r} \neq 0 . \quad (2)$$

Dans [9] Béla Zay démontre que les suites  $U^1, \dots, U^r$  sont des suites récurrentes linéaires réelles et ont toutes le même polynôme caractéristique. Dans ce qui suit nous généralisons ce résultat au cas où les suites sont dans un module sur un anneau commutatif unitaire. Ce qui permet d'obtenir, par une méthode élémentaire, le résultat établi par U. Cerruti et F. Vaccarino dans ([3]), sur la stabilité du produit de Hadamard de deux suites récurrentes linéaires sur un anneau commutatif unitaire. Une autre application de ce résultat consiste à montrer que les décimations de suites récurrentes linéaires sont également des suites récurrentes linéaires.

Mais auparavant, signalons que, sur un corps commutatif  $K$ , le passage des suites à leurs séries génératrices permet de donner une autre démonstration du résultat de Béla Zay. Rappelons rapidement que si  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  est un élément de  $K^{\mathbb{N}}$  et si  $U(X)$  est sa série génératrice dans  $K[[X]]$ , alors, pour  $l \in \mathbb{N}^*$ , la série génératrice  $V(X)$  de la suite  $V = (u_{n+l})_{n \geq 0}$ , translatée de  $U$ , est donnée par :

$$X^l V(X) = U(X) - \sum_{i=0}^{l-1} u_i X^i .$$

En injectant toutes les séries génératrices de  $U^1, \dots, U^r$  et de leurs translatées dans (1) on obtient un système linéaire de  $r$  équations à coefficients dans  $K[X]$ . Les solutions de ce système sont alors des fractions rationnelles. Ce qui signifie que les suites  $U^1, \dots, U^r$  sont des suites récurrentes linéaires.

## 2 Suites récurrentes linéaires sur un module

La théorie des suites récurrentes linéaires sur des modules est très riche et relativement récente. On pourra consulter le travail de Kurakin *et al.* (voir [9]) pour à la fois un historique et un exposé complet du sujet. Dans cette section nous nous contenterons de rappeler les éléments dont nous aurons besoin dans la suite.

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire d'élément neutre 1. Le groupe des éléments inversibles de  $A$  sera noté  $\mathcal{U}(A)$  ou tout simplement  $\mathcal{U}$ . Dans la suite  $M$  désignera un module sur  $A$ .

Soit  $S(M)$  l'ensemble des suites à valeurs dans  $M$ . Un élément  $U$  de  $S(M)$  sera noté  $(u_n)_{n \geq 0}$ . Soit  $B = A[X]$  l'algèbre des polynômes sur  $A$ . Pour  $d \in \mathbb{N}$ ,

$$p(X) = \sum_{i=0}^d p_i X^i \in B, \quad U = (u_n) \in S,$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$(p(X)u)_n = \sum_{i=0}^d p_i u_{n+i} .$$

Muni de l'addition usuelle des suites et de cette multiplication par les scalaires,  $S(M)$  est alors un  $B$ -module.

Soit  $U \in S$ . On désigne par  $\mathcal{I}_u$  l'idéal annulateur de  $U$  dans  $B$ . i.e.,

$$\mathcal{I}_u = \{p \in B \ ; \ pU = 0\}.$$

### Définitions

Soit  $U \in S$ . On dit que  $U$  est une suite récurrente linéaire (sur  $M$ ) si  $\mathcal{I}_u$  contient un polynôme unitaire.

L'idéal  $\mathcal{I}_u$  est alors appelé idéal caractéristique de  $U$  et les polynômes unitaires de  $\mathcal{I}_u$  des polynômes caractéristiques de  $U$ .

Soit  $d$  le degré minimal des polynômes unitaires de  $\mathcal{I}_u$ . On dit que la suite  $U$  est de longueur  $d$ .

### Remarques

1- Soit  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  une suite à valeurs dans  $M$ . Si la suite  $U$  est récurrente linéaire alors l'idéal  $\mathcal{I}_u$  est cofini : le quotient de  $B$  par  $\mathcal{I}_u$  est un  $A$ -module de type fini. Inversement si  $\mathcal{I}_u$  est cofini alors la suite  $U$  est une suite récurrente linéaire. En effet, supposons que  $B/\mathcal{I}_u$  est engendré par  $g_1 + \mathcal{I}_u, \dots, g_s + \mathcal{I}_u$  où  $s \in \mathbb{N}$  et  $g_1, \dots, g_s$  sont dans  $B$ . Soit  $d = \max_{1 \leq s} \deg(g_i)$ . la famille  $(X^i + \mathcal{I}_u)_{0 \leq i \leq d}$  est alors une famille génératrice de  $B/\mathcal{I}_u$  et par conséquent, pour  $n \geq d$ , il existe  $a_0, \dots, a_d$  dans  $A$  tels que :

$$X^n + \mathcal{I}_u = \sum_{j=0}^d a_j (X^j + \mathcal{I}_u).$$

Ce qui signifie que le polynôme unitaire  $X^n - \sum_{j=0}^d a_j X^j$  est dans  $\mathcal{I}_u$ .

2- Si on suppose que  $A$  est un corps et que  $M = A$ , on retrouve la définition classique des suites récurrentes linéaires sur des corps commutatifs (voir [8]).

3- Contrairement au cas où  $A$  est un corps, une suite récurrente linéaire sur  $M$  peut posséder plusieurs polynômes minimaux unitaires. Voir [9] pour des exemples.

4- L'ensemble, qu'on notera  $SR(M)$ , des suites récurrentes linéaires sur  $M$  est un sous  $B$ -module de  $S(M)$ .

Soit  $q(X) \in A[X]$  un polynôme unitaire. L'ensemble des suites récurrentes linéaires sur  $M$  de polynôme caractéristique  $q(X)$  est aussi un  $B$ -module.

### 3 Systèmes récurrents sur un module

On garde les mêmes notations que ci-dessus et on cherche à déterminer les suites  $U^1, \dots, U^r$  de  $M$  dont les termes initiaux  $u_0^j, \dots, u_{m_j-1}^j$  ( $j \in I$ ), sont dans  $M$  et qui satisfont à :

$$\begin{cases} C_{11}(X)U^1 + \dots + C_{1r}(X)U^r = 0, \\ \vdots \\ C_{r1}(X)U^1 + \dots + C_{rr}(X)U^r = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où

$$C_{ij}(X) = \sum_{l=0}^{m_j} c_{i,j,l} X^l \in B, \quad \forall (i, j) \in I^2.$$

On supposera, en outre, que

$$\det((c_{i,j,m_j})_{1 \leq i, j \leq r}) \in \mathcal{U}. \quad (4)$$

Le résultat de B. Zay, obtenu dans [9], est alors un cas particulier du

#### Théorème 1

Pour toute famille  $u_0^j, \dots, u_{m_j-1}^j$ , ( $j \in I$ ) d'éléments de  $M$ , le système (3) possède une unique solution  $U^1, \dots, U^r$  où  $U^1, \dots, U^r$  sont des suites récurrentes linéaires sur  $M$  de longueur inférieure ou égale à  $\sum_{j=1}^r m_j$ .

#### Preuve

L'existence et l'unicité d'une solution du système (3) est assurée par la condition (4). Montrons que les solutions sont des suites récurrentes linéaires.

Posons

$$C(X) = (C_{ij}(X))_{1 \leq i, j \leq r}.$$

C'est un élément de  $\mathbb{M}_r(B)$ . Soit

$$V = \begin{pmatrix} U^1 \\ \vdots \\ U^r \end{pmatrix}.$$

Le système (3) est équivalent à :  $C(X)V = 0$ .

L'anneau  $B$  étant commutatif, la matrice  $C(X)$  est alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton ([1, 7.23]), racine de son polynôme caractéristique,

$$P(Y) = Y^r + a_{r-1}(X)Y^{r-1} + \dots + a_0(X) \in \mathbb{M}_r(B)[Y].$$

On a donc

$$P(C(X))V = 0 \quad \text{et} \quad C(X)V = 0.$$

caractéristique. Donc  $a_0(X)V = 0$ .

Par conséquent

$$a_0(X)U^i = 0 \quad \forall i \in I.$$

Remarquons que le déterminant de  $C(X)$  est, au signe près, le polynôme  $a_0(X)$ . Ce dernier a un coefficient dominant inversible dans  $A$ . En effet, si

$$\det(C(X)) = \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon_\sigma C_{1\sigma(1)}(X) \cdots C_{r\sigma(r)}(X),$$

le coefficient dominant de ce déterminant est donné par :

$$\sum_{\sigma \in S_r} \epsilon_\sigma C_{1\sigma(1)m_{\sigma(1)}} \cdots C_{r\sigma(r)m_{\sigma(r)}} = \det(C_{ijm_j}) \in \mathcal{U}.$$

On a montré ainsi que pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , l'idéal  $\mathcal{I}_{U^i}$  contient un polynôme unitaire de degré inférieur ou égal à  $\sum_{j=1}^r m_j$ . D'où le théorème.

### Remarques

1. Si  $A[X]$  est principal (c'est-à-dire si  $A$  est un corps), on peut arriver au même résultat en utilisant la méthode des facteurs invariants. La matrice  $C(X)$  est équivalente à une matrice diagonale, disons

$$D(X) = \text{diag}(D_1(X), \dots, D_r(X))$$

où  $D_i(X)$  divise  $D_{i+1}(X)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ . Dans ce cas, le polynôme  $D_r(X)$  est un polynôme caractéristique des suites  $U^1, \dots, U^r$ .

2. Soit  $M_2 = M^{\mathbb{N}^2}$  l'ensemble des 2-suites sur le  $A$ -module  $M$ . Comme dans le cas des suites sur  $M$ ,  $M_2$  est muni canoniquement d'une structure de  $A[X, Y]$ -module. Pour  $d \in \mathbb{N}$ ,

$$U = (u_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \quad \text{et} \quad p(X, Y) = \sum_{0 \leq i, j \leq d} p_{ij} X^i Y^j \in A[X, Y],$$

on pose

$$(p(X, Y)U)_{mn} = \sum_{0 \leq i, j \leq d} p_{ij} u_{m+i, n+j} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

Soit  $C(X, Y)$  une matrice d'ordre  $r$  et à coefficients dans  $A[X, Y]$ . Si on suppose que le système  $C(X, Y)U = 0$  possède des solutions  $U^1, \dots, U^r$  dans  $M_2$ , alors, en remplaçant dans la preuve du théorème  $A[X]$  par  $A[X, Y]$ , on voit que ces solutions sont toutes annulées par un même polynôme dans  $A[X, Y]$ .

Le résultat reste également valable si on considère des  $k$ -suites, c'est-à-dire des éléments du  $A$ -module  $M^{\mathbb{N}^k}$ , pour  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

### Corollaire (Cas non homogène)

*On utilise les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus. Soient  $C(X)$  une matrice de d'ordre  $r$  à coefficients dans  $B$ ,  $W^1, \dots, W^r$  des suites récurrentes linéaires sur  $M$  et  $W$  le vecteur transposé de  $(W^1, \dots, W^r)$ . On suppose que la matrice  $C(X)$  vérifie la condition (4). Alors le système*

$$C(X)U = W \tag{5}$$

possède une unique solution  $U = (U^1, \dots, U^r)$  où les suites  $U^1, \dots, U^r$  sont des suites récurrentes linéaires sur  $M$  ayant même polynôme caractéristique.

### Preuve

Soit, comme ci-dessus,  $P(Y) = Y^r + a_{r-1}(X)Y^{r-1} + \dots + a_0(X) \in \mathbb{M}_r(B)[Y]$  le polynôme caractéristique de  $C(X)$ .

On a

$$C(X)^r U + a_{r-1}(X)C(X)^{r-1}U + \dots + a_0(X)U = 0. \quad (6)$$

Or  $C(X)U = W$ , donc

$$C(X)^{r-1}W + a_{r-1}(X)C(X)^{r-2}W + \dots + a_0(X)U = 0. \quad (7)$$

On pose pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, r\}$ ,

$$\mathcal{W}_i = a_i(X)C(X)^{i-1}W \quad \text{avec} \quad a_r(X) = 1.$$

Comme les suites récurrentes linéaires sur  $M$  forment un  $B$ -module, les suites  $\mathcal{W}_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , sont des suites récurrentes linéaires sur  $M^r$  dont un polynôme caractéristique, disons  $Q(X)$ , est le produit des polynômes caractéristiques des suites  $(W^1, \dots, W^r)$  (voir remarques du paragraphe précédent).

On pose  $\Lambda = \mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_r$ . C'est encore une suite récurrente linéaire sur  $M^r$  de polynôme caractéristique  $Q(X)$ .

L'égalité (7) s'écrit alors  $a_0(X)U = -\Lambda$ ; ou encore :

$$\begin{pmatrix} a_0(X) & 1 \\ 0 & Q(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet, grâce au théorème, de voir que les composantes de  $U$  et de  $\Lambda$  sont des suites récurrentes linéaires sur  $M$  de polynôme caractéristique  $Q(X)a_0(X)$ .

### Remarques

1. Soit  $G$  le monoïde des matrices de  $\mathbb{M}_r(A[X])$  dont le déterminant a un coefficient dominant inversible dans  $A$ . Le corollaire ci-dessus signifie que, pour tout  $g$  dans  $G$  et toute suite récurrente linéaire  $W$  d'éléments de  $M^r$ , il existe une suite récurrente linéaire  $U$  d'éléments de  $M^r$  telle que  $gU = W$ . Autrement dit le module des suites récurrentes linéaires sur  $M^r$  est «  $G$ -divisible ».

On retrouve ainsi le lemme 1 de [8] qui assure que, si  $A$  est un corps et  $r = 1$  alors le  $A[X]$ -module des suites récurrentes linéaires d'éléments de  $A$  est divisible.

2. Soit  $R = \mathbb{M}_r(A[X])$  et  $S_r = (M^r)^\mathbb{N}$ . Pour

$$U = (U_1, \dots, U_r) \quad \text{dans} \quad S_r \quad \text{et} \quad C(X) = (C_{ij}(X))_{1 \leq i, j \leq r},$$

on pose

$$C(X)U = \left( \sum_{j=1}^r C_{1j}(X)U_j, \dots, \sum_{j=1}^r C_{rj}(X)U_j \right).$$

Muni de l'addition usuelle des suites et de ce produit  $S_r$  est alors un  $R$ -module à gauche. Soit  $U$  dans  $S_r$ . La preuve du théorème ci-dessus montre que si l'idéal à gauche  $Ann_R(U)$  contient une matrice  $C(X)$  alors il contient  $(\det C(X))I_r$ , où  $I_r$  désigne la matrice identité d'ordre  $r$ . En particulier si  $C(X)$  a un déterminant ayant un coefficient dominant inversible dans  $A$  alors  $U$  est une suite de  $M^r$  récurrente linéaire.

Soit  $Tors_R(S_r) = \{u \in S_r; \exists g \in R, gU = 0\}$  le sous module de torsion de  $S_r$  et soit  $\mathcal{L}_r(M^r)$  l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'éléments de  $M^r$ . On a bien entendu

$$\mathcal{L}_r(M^r) \subset Tors_R(S_r).$$

Cependant, contrairement au cas où  $A$  est corps, on n'a pas toujours l'égalité même si  $r = 1$ . Pour s'en convaincre, il suffit de prendre  $A = \mathbb{Z}$ ,  $M$  le quotient de  $\mathbb{Z}[X, i \in \mathbb{N}]$  par l'idéal  $J = \langle 2X_{i+1} - X_i, i \in \mathbb{N} \rangle$  et  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  désigne la classe de  $X_n$  modulo  $J$ . On a alors  $U \in Tors_{\mathbb{Z}[X]}(S_1)$  car  $2X - 1 \in Ann_{\mathbb{Z}[X]}(U)$  mais  $U$  n'est pas une suite récurrente linéaire ( $U \notin \mathcal{L}_1(M)$ ).

### Exemples

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire et comme ci-dessus soit  $M$  un  $A$ -module et  $S(M)$  l'ensemble des suites sur  $M$ .

#### Exemple 1

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Soit, pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ ,  $C_k = (c_{ij}^k)_{1 \leq i, j \leq r}$  une matrice d'ordre  $r$  à coefficients dans  $A$ . Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(W_n)$  le vecteur de  $M^r$ , transposé du vecteur  $(u_n^1, \dots, u_n^r)$ . On suppose qu'il existe  $h \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(W_n)_{n \geq 0}$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+h} = C_1 W_{n+h-1} + \dots + C_h W_n,$$

Les suites  $(u_n^j)_{n \geq 0}$ , pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , sont alors des suites récurrentes linéaires ayant le même polynôme caractéristique. En effet, la relation ci-dessus est équivalente au système suivant :

$$u_{n+h}^k - \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^r c_{kj}^i u_{n+h-i}^j = 0, \quad k \in \{1, \dots, r\},$$

qui représente un cas particulier du système (3).

Les exemples donnés par B. Zay dans [9] sont des cas particuliers des exemples suivants.

#### Exemple 2

On veut déterminer les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  dans  $S(M)$  telles que :  $u_1, v_1, w_1$  et  $w_2$  soient dans  $M$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n - v_n - w_{n+1} & = 0, \\ -u_{n+1} + v_{n+1} - v_n & = 0, \\ w_{n+2} - w_{n+1} - w_n & = 0. \end{cases} \quad (8)$$

La matrice  $C(X)$  associée à ce système est alors

$$C(X) = \begin{pmatrix} X-1 & -1 & -X \\ -X & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 - X - 1 \end{pmatrix};$$

la matrice des coefficients dominants est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est égal à 1. Le système (5) possède donc une solution unique, formée de suites récurrentes linéaires sur  $M$ , de polynôme caractéristique

$$\det(C(X)) = (X^2 - 3X + 1)(X^2 - X - 1).$$

### Exemple 3

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p_1(X), \dots, p_s(X)$  des polynômes sur  $A$  et soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  des éléments de  $A$ . On considère dans  $A^{\mathbb{N}}$  la suite  $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par :

$$v_n = \sum_{i=1}^s p_i(n) \alpha_i^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On sait que la suite  $V$  est une suite récurrente linéaire sur  $A$ , si  $A$  est un corps. En fait, même si  $A$  n'est pas un corps, c'est encore une suite récurrente linéaire sur  $A$  (considéré comme  $A$ -module) au sens de la définition de la section 3. En effet, comme l'ensemble des suites récurrentes linéaires sur  $A$  est un  $A$ -module, pour montrer que  $V$  est une suite récurrente linéaire, il suffit de le faire pour la suite  $V$  telle que  $v_n = n\alpha^n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Or cette suite est une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique  $(X - \alpha)^2$ .

Avec les mêmes notations, soit à déterminer les suites  $U = (u_n)_{n \geq 0}$  vérifiant :

$$\sum_{i=0}^m a_i u_{m+i} + \sum_{i=1}^s p_i(n) \alpha_i^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in A, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ .

Soit  $Q(X)$  un polynôme caractéristique de la suite  $V$ . Si on suppose que  $a_m$  est inversible dans  $A$  alors, grâce au corollaire, la solution  $U$  de l'équation (9) ci-dessus est une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique  $(a_0 + \dots + a_m X^m)Q(X)$ .

## 4 Applications

### 4.1 Algèbre de Hadamard de suites récurrentes linéaires

On garde les notations des sections précédentes et on suppose de plus que  $M$  est une  $A$ -algèbre associative, commutative et unitaire.

Soient  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  et  $v = (v_n)_{n \geq 0}$  deux suites à valeurs dans  $M$ . Le produit de Hadamard de  $u$  et  $v$  est la suite  $w$ , notée  $u \odot v$ , est donnée par :

$$w_n = u_n v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Muni de ce produit, le  $A$ -module  $S(M)$  des suites à valeurs dans  $M$  est une  $A$ -algèbre (associative, commutative et unitaire). Qu'en est-il du  $A$ -module  $SR(M)$  des suites récurrentes linéaires à valeurs dans  $M$ ?

Dans le cas où  $A$  est un corps et  $M = A$ , on savait depuis longtemps que  $SR(M)$  est une sous  $A$ -algèbre de  $S(A)$  (voir par exemple ([8]) pour plus de détails). En 1995, U. Cerruti et F. Vaccarino montrent, dans ([3]), que le résultat est vrai sur tout anneau commutatif unitaire. Dans ce qui suit, nous redémontrons ce résultat, en utilisant le théorème 1.

## Théorème 2

Soient  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  et  $v = (v_n)_{n \geq 0}$  deux suites récurrentes linéaires à valeurs dans la  $A$ -algèbre  $M$ . La suite  $w = u \odot v$  est alors une suite récurrente linéaire.

## Preuve

Quitte à multiplier par une puissance convenable de  $X$ , on peut supposer que les polynômes caractéristiques des suites  $u$  et  $v$  sont de même degré, disons  $s$ . Soit

$$p(X) = X^s - a_1 X^{s-1} - \dots - a_s \quad \text{et} \quad q(X) = X^s - b_1 X^{s-1} - \dots - b_s$$

les polynômes caractéristiques des suites  $u$  et  $v$  respectivement. On a donc, dans les  $A$ -modules  $A[X]u$  et  $A[X]v$  les égalités :

$$X^s u = \sum_{i=1}^s a_i X^i u \quad \text{et} \quad X^s v = \sum_{i=1}^s b_i X^i v \quad (10)$$

On désignera par  $J$  l'ensemble  $\{1, \dots, s-1\}$ . On pose, pour tout  $i \in J$ ,

$$\alpha^i = u \odot X^i v \quad ; \quad \beta^i = X^i u \odot v.$$

En utilisant les égalités (10), le calcul de la suite  $X^s w$  et des suites  $X^k \beta^{s-k}$ ,  $X^k \alpha^{s-k}$ , pour  $k \in J$ , donne :

$$\begin{aligned} X^s w &= \sum_{i=1}^s a_i b_i X^{s-i} w + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=0}^{s-k-1} (a_{s-j} b_{s-k-j} X^j \alpha^k + b_{s-j} a_{s-k-j} X^j \beta^k), \\ X^k \beta^{s-k} &= a_{s-k} X^k w + \sum_{j=1}^{s-k-1} a_j X^k \beta^{s-k-j} + \sum_{j=1}^k a_{s-k+j} X^{k-j} \alpha^j, \\ X^k \alpha^{s-k} &= b_{s-k} X^k w + \sum_{j=1}^{s-k-1} b_j X^k \alpha^{s-k-j} + \sum_{j=1}^k b_{s-k+j} X^{k-j} \beta^j \end{aligned}$$

Ces égalités s'écrivent :

$$\begin{array}{ccccccc} P_{0,0} w + P_{0,1} \alpha_1 + & \cdots & + P_{0,s-1} \alpha_{s-1} + P_{0,s} \beta_1 + & \cdots & + P_{0,2s-2} \beta_{s-1} = 0 \\ P_{1,0} w + P_{1,1} \alpha_1 + & \cdots & + P_{1,s-1} \alpha_{s-1} + P_{1,s} \beta_1 + & \cdots & + P_{1,2s-2} \beta_{s-1} = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{2s-2,0} w + P_{2s-2,1} \alpha_1 + & \cdots & + P_{2s-2,s-1} \alpha_{s-1} + P_{2s-2,s} \beta_1 + & \cdots & + P_{2s-2,2s-2} \beta_{s-1} = 0. \end{array}$$

où, si on pose  $I = \{0, \dots, t-1\}$  et  $a_0 = b_0 = 1$ , les  $(P_{i,j})_{(i,j) \in I^2}$  sont des polynômes de  $A[X]$  donnés par :

$$\text{a) } P_{0,0} = X^s - \sum_{i=1}^s a_i b_i X^{s-i};$$

$$\text{b) pour } (i,j) \in \{1, \dots, s-1\} \times \{0, \dots, s-2\},$$

$$\begin{aligned} P_{0,j} &= - \sum_{k=1}^{s-1} b_k a_{k+j} X^{s-k-1}, & P_{i,0} &= -b_i X^{s-i}, \\ P_{0,s+j} &= - \sum_{k=1}^{s-1} a_k b_{k+j} X^{s-k-1}, & P_{s+j,0} &= -a_j X^{s-j}; \end{aligned}$$

$$\text{c) pour } (i,j) \in \{1, \dots, s-1\}^2 \text{ et } (k,l) \in \{0, \dots, s-2\}^2,$$

$$P_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ -b_{i-j} X^{s-i} & \text{sinon} \end{cases}, \quad P_{k+l,s} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k, \\ -a_{k-l} X^{s-k-1} & \text{sinon} \end{cases};$$

$$\text{d) pour } (i,j) \in \{1, \dots, s-1\}^2 \text{ et } (k,l) \in \{0, \dots, s-2\} \times \{1, \dots, s-1\},$$

$$P_{i+1,j+s} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j > s-2, \\ -b_s & \text{si } i+j = s-2, \\ -b_{i+j+2} X^{s-i-j-2} & \text{sinon} \end{cases}; \quad P_{s+k,l} = \begin{cases} 0 & \text{si } k+l > s-1, \\ -a_s & \text{si } k+l = s-1, \\ -a_{k+l+1} X^{s-k-l-1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Autrement dit, si  $\mathcal{W}$  désigne le vecteur transposé du vecteur  $(w, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta_1, \dots, \beta_{s-1})$  et si on note  $C(X)$  la matrice formée des polynômes  $(P_{i,j})_{(i,j) \in I^2}$ , on a  $C(X)\mathcal{W} = 0$ . Comme

$$\deg P_{i,i} = s-i, \quad \deg P_{s+i,s+i} = s-i-1, \quad \forall (i,j) \in \{0, \dots, s-1\} \times \{0, \dots, s-2\}$$

et que, pour tout couple  $(i,j)$  dans  $\{0, \dots, 2s-2\}^2$  tel que  $i \neq j$ ,

$$\deg P_{i,j} < \deg P_{i,i} \quad \text{et} \quad P_{i,i} \text{ unitaire,}$$

on déduit que la matrice des coefficients dominants est la matrice identité. Ce qui permet de conclure, grâce au théorème 1, que le vecteur  $\mathcal{W}$  est formé de suites récurrentes linéaires.

### Remarque

Si on suppose que  $A$  est un anneau noethérien, la conclusion du théorème est triviale. En effet, la suite  $w = u \odot v$  est dans le sous module engendré par les  $X^i u \odot X^j v$ ,  $(i,j) \in J^2$  et donc le  $A$ -module  $A[X]w$  est de type fini sur  $A$ . La suite  $w$  est alors récurrente linéaire d'après la remarque 1 de la section 2.

### Exemple

Soit à déterminer un polynôme caractéristique de la suite  $w = (u_n v_n)_{n \geq 0}$  où les suites  $u$  et  $v$  sont à valeurs dans un anneau commutatif unitaire  $A$  et de polynômes caractéristiques respectifs :

$$X^2 - aX - b \quad \text{et} \quad X^2 - cX - d.$$

La matrice  $C(X)$  du théorème 2 est donnée par :

$$C(X) = \begin{pmatrix} X^2 - acX - bd & -ad & -bc \\ -cX & -d & X \\ -aX & X & -b \end{pmatrix}.$$

Son déterminant, donc un polynôme caractéristique de  $w$ , est égal à

$$-X^4 + acX^3 + (2bd + a^2d + c^2b)X^2 + acbdX - b^2d^2.$$

On retrouve ainsi, à un signe près, le même polynôme caractéristique que celui obtenu dans ([3]).

## 4.2 Décimations de suites récurrentes linéaires

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $M$  un  $A$ -module et  $SR(M)$  le  $A[X]$ -module des suites récurrentes linéaires à valeurs dans  $M$ .

**Définition.** Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Les suites  $u_j$ , pour  $j \in \{0, \dots, d-1\}$ , définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_j(n) = u(nd + j),$$

sont appelées les suites  $d$ -extraites (ou  $d$ -décimations ou encore sections) de  $u$ .

Inversement, soit  $d \in \mathbb{N}$  et  $u, u_0, \dots, u_{d-1}$ ,  $(d+1)$  suites dans  $S(M)$ . On dit que  $u$  est un emboîtement des suites  $u_0, \dots, u_{d-1}$  si l'égalité suivante est vérifiée :

$$\forall j \in \{0, \dots, d-1\}, \forall n \in \mathbb{N}, u(nd + j) = u_j(n).$$

Soit  $d \in \mathbb{N}$  et  $J = \{0, \dots, d-1\}$ . Comme dans la situation classique où  $M$  est un corps (pour les anneaux voir [2]), on définit les applications suivantes :

$$\delta_d : S(M) \rightarrow S(M), \quad \Delta_d : S(M) \rightarrow S(M)^d, \quad \text{et} \quad E_d : S(M)^d \rightarrow S(M)$$

par :

- a.  $\forall u \in S(M), \forall n \in \mathbb{N}, \delta_d(u(n)) = u(dn)$  ;
- b.  $\forall u \in S(M), \Delta_d u = (\delta_d u, \delta_d Xu, \dots, \delta_d X^{d-1}u)$  ;
- c.  $\forall (u_0, \dots, u_{d-1}) \in S(M)^d, \forall j \in J, \forall n \in \mathbb{N},$

$$E_d(u_0, \dots, u_{d-1})(dn + j) = u_j(n).$$

Ces applications sont des morphismes de  $A$ -modules avec  $\Delta_d^{-1} = E_d$ . Si  $M$  est une  $A$ -algèbre elles sont alors des morphismes de  $A$ -algèbres relativement au produit de Hadamard. On trouve dans [4] plusieurs propriétés de ces opérateurs sur des anneaux commutatifs unitaires. Elles se généralisent sans peine au cas de modules sur des anneaux commutatifs.

### Proposition

Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $M$  un  $A$ -module et  $d$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . On a alors :

- a.  $\forall p \in A[X], \quad p(X)\delta_d = \delta_d p(X^d);$
- b.  $\forall (u_0, \dots, u_{d-1}) \in S(M)^d, \quad X E_d(u_0, \dots, u_{d-1}) = E_d(u_1, \dots, u_{d-1}, X u_0);$
- c.  $\forall (u_0, \dots, u_{d-1}) \in S(M)^d, \quad p(X^d) E_d(u_0, \dots, u_{d-1}) = E_d(p(X)u_0, \dots, p(X)u_{d-1}).$

### Preuve

La démonstration de a. et b. est une simple vérification et celle de c. se ramène, grâce à la linéarité de l'opérateur  $E_d$ , au cas où  $p(X)$  est une puissance de  $X$ . Le résultat s'établit ensuite par une simple récurrence et en utilisant b.

### Corollaire

Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $M$  un  $A$ -module et  $u$  un élément de  $S(M)$ . S'il existe  $d$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que les suites  $d$ -extraites de  $u$  soient dans  $SR(M)$  alors  $u$  est dans  $SR(M)$ .

### Preuve

Si  $u_0, \dots, u_{d-1}$  sont des suites  $d$ -extraites de  $u$  et si  $p$  en est un polynôme caractéristique commun alors, d'après la propriété c. de la proposition ci-dessus, le polynôme  $p(X^d)$  est un polynôme caractéristique de  $u$ .

On trouve dans [2] ou bien dans [4] que, si  $u$  est dans  $SR(A)$  alors, pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , les suites  $d$ -extraites sont dans  $SR(A)$ . La preuve de ce résultat utilise la décomposition, en facteurs linéaires, du polynôme caractéristique de  $u$ . Nous en proposons ici une démonstration, basée sur le théorème 1, et qui, outre sa simplicité, donne le polynôme caractéristique des  $d$ -décimations de façon plus directe et sans passer par le produit tensoriel de matrices et l'écriture explicite du terme général de la suite  $u$ .

### Proposition

Soit  $u \in SR(M)$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . Les suites  $d$ -extraites de  $u$  sont alors dans  $SR(M)$ .

### Preuve

Soit  $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente linéaire à valeurs dans  $M$  de polynôme caractéristique

$$p(X) = X^s - a_1 X^{s-1} - \dots - a_s \in A[X],$$

et soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}$  les suites  $d$ -extraites de  $u$ .

Si  $d \geq s$ , on peut supposer, quitte à multiplier  $p$  par  $X^{d-s}$ , que  $d = s$ .

Dans ce cas, on a :

$$X\alpha_0 = \sum_{i=1}^d a_i \alpha_{d-i} \quad \text{et} \quad X\alpha_k = \sum_{i=1}^k a_i X\alpha_{k-i} + \sum_{i=1}^{d-k} a_{k+i} \alpha_{d-i}, \quad \forall k \in \{1, \dots, d-1\}.$$

Si on pose :

$$C(X) = \begin{pmatrix} a_d - X & a_{d-1} & a_{d-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 X & a_d - X & a_{d-1} & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d-1} X & a_{d-2} X & a_{d-3} X & \cdots & a_d - X \end{pmatrix}$$

et si on désigne par  $W$  le vecteur transposé du vecteur  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1})$ , on obtient  $C(X)W = 0$ . Comme le déterminant de la matrice  $C(X)$  est unitaire (son coefficient dominant est égal à  $(-1)^d$ ), on en déduit que les suites  $d$ -extraites de  $u$  sont récurrentes linéaires, de polynôme caractéristique  $\det(C(X))$ .

Si  $d < s$  on peut, ici encore, supposer que  $s$  est un multiple de  $d$  et on va donner une autre preuve légèrement différente de celle donnée ci-dessus et qui conduit aux mêmes calculs.

Soit donc  $u = E_d(\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1})$  et  $f(X) = \sum_{i=0}^s f_i X^i$  un polynôme caractéristique de  $u$  avec  $f_s = 1$  et  $s = dq$ . En utilisant la proposition précédente et le fait que

$$\text{si } E_d(u_1, u_2, \dots, u_d) = 0 \quad \text{alors } u_1 = u_2 = \cdots = u_d = 0 ;$$

l'égalité  $f(X)E_d(\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) = 0$  entraîne l'existence d'une matrice  $C(X)$  dans  $\mathbb{M}_d(A[X])$  telle que  $C(X)\alpha = 0$ . Ici  $\alpha$  désigne le transposé de  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1})$  et  $C(X)$  est la matrice

$$C(X) = \begin{pmatrix} A_0(X) & A_0(X) & \cdots & A_{d-2}(X) & A_{d-1}(X) \\ XA_{d-1}(X) & A_0(X) & \cdots & A_{d-3}(X) & A_{d-2}(X) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ XA_1(X) & XA_2(X) & \cdots & XA_{d-1}(X) & A_0(X) \end{pmatrix} ;$$

où, pour  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ , on passe de la ligne, disons  $(a_{i,1}, \dots, a_{i,d})$ , à la ligne suivante en posant

$$a_{i+1,1} = Xa_{i,n} \quad \text{et} \quad a_{i+1,k} = a_{i,k-1} \quad \forall k \in \{2, \dots, n\}$$

et

$$A_i(X) = \sum_{j \equiv i \pmod{d}} f_j X^{(j-i)/d}.$$

La matrice dont le déterminant donne le coefficient dominant du polynôme caractéristique est alors une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous égaux à  $f_s$ . Comme  $f_s$  est égal à 1, le théorème 1 conduit alors au résultat.

## Références

- [1] W. C. Brown, Matrices over commutative rings, Dekker, New York, 1993.
- [2] L. Cerlienco, M. Mignotte, F. Piras, Suites récurrentes linéaires, L'Enseignement Mathématiques **33**, 67 – 68.
- [3] U. Cerruti, F. Vaccarino, R-algebra of linear recurrent sequences, J. Algebra **175**, No. 1, (1995), 332 – 338.
- [4] D. Ferrand, Suites récurrentes, IRMAR, Université de Rennes, 1988.
- [5] V. E. Hoggat, Fibonacci Quart., Problem H-351 **21**, (1983), 75.
- [6] R. Lidl and H. Niederreiter, Finite fields, Cambridge University Press, 1997.
- [7] V. L. Kurakin, A. S. Kuzmin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev, Linear recurring sequences over rings and modules, J. of Math. Sci. **76**, No. 6, (1995), 2793 – 2915.
- [8] S. Singh, A note on linear recurring sequences, Lin. Alg. and its Applications , **104** (1988), 97 – 101.
- [9] B. Zay, Solutions of linear recursive systems, Publ. Math. Debrecen **41**/1–2, (1992), 127 – 134.